Gonda János

POLINOMOK

Példák és megoldások

ELTE Budapest 2007-11-30
IK Digitális Könyvtár
4. javított kiadás

Felsőoktatási tankönyv

Lektorálták:
Bui Minh Phong
Láng Csabáné

Szerkesztette: Láng Csabáné

Tartalomjegyzék

1. Előszó

Ez a példatár elsősorban az ELTE Informatikai Kar programtervező informatikus, programtervező matematikus, programozó és informatika tanár szakos hallgatói számára készült, reméljük azonban, hogy mindazok, akik érdeklődnek a polinomok iránt, meríthetnek belőle.

A 2. fejezetben a példákat soroltuk fel, a 3. fejezetben pedig a példák részletesen kidolgozott megoldásai szerepelnek.

Az itt szereplő polinomokkal kapcsolatos példák és megoldásaik ennek a példatárnak a számára készültek, itt jelennek meg először.

A polinomok témája iránt érdeklődőknek ajánljuk még Gonda János: *Gyakorlatok és feladatok a Bevezetés a matematikába című tárgyhoz; Polinomok, véges testek, kongruenciák, kódolás* (ELTE TTK, Budapest, 2001) című könyvét, amelyben szintén számos kidolgozott példa található.

A könyvben található hibákra, hiányosságokra vonatkozó észrevételeket köszönettel fogadjuk.

Budapest, 2006. május

Láng Csabáné

szerkesztő

zslang@compalg.inf.elte.hu

ELTE Informatikai Kar Komputer Algebra Tanszék

1117 Budapest, Pázmány Péter sétány I/C.

2. Bevezetés

Ez a példatár a polinomokkal kapcsolatos feladatokat tartalmaz. Egy-egy számozott feladatcsoport a polinomok egy-egy problémájához kapcsolódik, és igyekszik a problémát minél széleskörűbben bemutatni, és megmutatni, hogy a szokásosnál, a "hétköznapi"-nál általánosabb esetben is lehet ezeket a kérdéseket analizálni (és a gyakorlatban kiderül, hogy szükség is van az ilyen kiterjesztésekre). Ebből következik, hogy egy számozott csoport több feladatot is felölel. Foglalkozunk csaknem triviális kérdésekkel (a tapasztalat szerint amikor valaki először találkozik ezekkel az egyszerűnek mondott feladatokkal, gyakran nem látja első ránézésre, hogy hogyan kell az elméletet a gyakorlatba átültetni), és bonyolultabb, összetettebb feladatokkal is. A vizsgált kérdések elméleti alapjai majdnem minden esetben megtalálhatóak az előadásokhoz kapcsolódó jegyzetekben, és ahol ez nem így van, ott a megoldások során röviden érintjük az elméletet is.

A példatárban szereplő valamennyi feladat megoldása megtalálható a második részben, és minden feladatcsoportnál részletesen leírásra került, hogy hogyan kell általában az adott típusú feladatot megoldani. A cél az volt, hogy a példatár használatával bárki képes legyen egyedül is elsajátítani a megoldásokhoz szükséges technikákat. Természetesen azt is fontosnak tartjuk, hogy a példák megoldásával a mögöttük lévő elméletet is sikerüljön jobban, mélyebben megérteni.

A példatárban az alábbi jelöléseket használtuk:

$\mathbf{N}_0$	a nem negatív egész számok halmaza
$\mathbf{N}$	a pozitív egész számok halmaza
$\mathbf{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbf{Q}$	a racionális számok halmaza
$\mathbf{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbf{C}$	a komplex számok halmaza
$\mathbf{Z}_m$	a modulo m maradékosztályok halmaza ($1 < m \in \mathbf{N}$)
$\mathbf{Z}_m^*$	a modulo m redukált maradékosztályok halmaza ($1 < m \in \mathbf{N}$)
$R^{(n)}$	egy R gyűrű fölötti $n \times n$-es mátrixok halmaza ($n \in \mathbf{N}$)
e	(multiplikatív) csoport, gyűrű vagy test egységeleme
p	általában prímszám
$\overline{k}$	$\mathbf{Z}_m$-ben a k-val reprezentált maradékosztály ($k \in \mathbf{Z}$), $\mathbf{C}$-ben a k komplex szám konjugáltja
(r, φ)	az r abszolút értékű, φ szögű komplex szám ($0 \le r \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathbf{R}$)
$\varepsilon_k^{(n)}$	az $\left(1, k\frac{2\pi}{n}\right) = \left(1, \frac{2\pi}{n}\right)^k$ komplex szám, vagyis a $k\frac{2\pi}{n}$ szöghöz tartozó n-edik komplex egységgyök
$\operatorname{sign}(x)$	az előjelfüggvény: $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$
$\mathbf{H}_m$	az $a + b\sqrt{m}$ alakú számok halmaza, ahol m négyzetmentes egész szám (vagyis olyan, 1-től különböző egész szám, amely egyetlen 1-nél nagyobb egész szám négyzetével sem osztható), és a, b egész számok

3. Példák

3.1. Polinomok

3.1.1. Polinom – nem polinom

1. Az alábbi szabályokkal kapcsolatban

- állapítsa meg, hogy melyik definiál polinomot;
- ha polinom, akkor
  - adja meg a fokát;
  - írja fel a szokásos polinomalakban.

a. $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z},\ u \mapsto u^2;$

b. $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{Z},\ u \mapsto u^2;$

c. $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{Z},\ f_i := i^2;$

d. $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{Z},\ f_i := \left\lfloor \frac{20}{2^i} \right\rfloor;$

e. $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{Z},\ f_i := \prod_{j=0}^{i} (n-j)\ (n \in \mathbf{N}_0);$

f. $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{Z},\ f_i := \begin{cases} n\,(\in \mathbf{N}_0)\,, & i = 0 \\ f_{i-1} \cdot (n-i)\,, & i > 0 \end{cases};$

g. $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{R},\ f_i := \left(1 - \frac{1}{i+1}\right)^{i+1};$

h. $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{R}$, $f_i := 1 - \operatorname{sign}\left(3^{-5} - 3^{2-i}\right)$;

i. $(n \in \mathbf{N})$; $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{C}$, $f_i := \begin{cases} 1, & i = 0 \\ \overline{f_{i-1}} \cdot \varepsilon_1^{(n)}, & i > 0 \end{cases}$
$\left(\varepsilon_1^{(n)} = \left(1, \frac{2\pi}{n}\right) \text{ a } \frac{2\pi}{n} \text{ szöghöz tartozó } n\text{-edik komplex egységgyök}\right)$;

j. $(n \in \mathbf{N})$; $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{C}$, $f_i := \begin{cases} 1, & i = 0 \\ \varepsilon_{n-1}^{(n)} - f_{i-1} \cdot \varepsilon_2^{(n)}, & i > 0 \end{cases}$
$\left(\varepsilon_k^{(n)} = \left(1, k\frac{2\pi}{n}\right) \text{ a } k\frac{2\pi}{n} \text{ szöghöz tartozó } n\text{-edik komplex egységgyök}\right)$;

k. $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{Z}$, $f_i := i!$;

l. $(2 \leq m \in \mathbf{N})$; $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{Z}_m$, $f_i := \overline{i!}$ ($\overline{i!}$ az $i!$ által reprezentált modulo m maradékosztály);

m. $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{Z}$, $f_i := \begin{cases} \varphi(0), & i = 0 \\ f_{i-1} \cdot \varphi(i), & i > 0 \end{cases}$, ahol $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tetszőleges függvény;

n. $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{Q}$, $f_i := 10^{-i} \left\lfloor 10^i \pi \right\rfloor$, ahol $\pi = 3,14\ldots$;

o. $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$, $f_i := \left\lfloor 10^i \pi \right\rfloor \bmod 10$, ahol $\pi = 3,14\ldots$;

p. $f : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{Z}$, $f_i := \left\lfloor 10^i \pi \right\rfloor \bmod 10^i$, ahol $\pi = 3,14\ldots$;

q. (R tetszőleges egységelemes gyűrű az e egységelemmel); $f : \mathbf{N}_0 \to R^{(3)}$,
$$f_i := \begin{cases} \begin{pmatrix} e & e & e \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, & i = 0 \\ f_{i-1} \cdot f_0, & i > 0 \end{cases};$$

r. (R tetszőleges egységelemes gyűrű az e egységelemmel); $f : \mathbf{N}_0 \to R^{(3)}$,
$$f_i := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ n_1 e & 0 & 0 \\ 0 & n_2 e & 0 \end{pmatrix}, & i = 0 \\ f_{i-1} \cdot f_0, & i > 0 \end{cases}, \ n_1 \in \mathbf{N}_0,\ n_2 \in \mathbf{N};$$

s. (R tetszőleges egységelemes gyűrű az e egységelemmel); $f : \mathbf{N}_0 \to R^{(3)}$,
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & n_1 e & n_3 e \\ 0 & 0 & n_2 e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ (n_1 \in \mathbf{N}, n_2 \in \mathbf{N}, n_3 \in \mathbf{N}),\ f_i := \mathbf{A}^i.$$

3.1.2. Polinom alakja, konstans polinom, lineáris polinom

2. Adja meg a legegyszerűbb alakban az alábbi polinomokat:

a. $f = 2x^0$, $R = \mathbf{Z}$;

b. $f = 2x^0 + 1x^1 + 3x^2 + 0x^3 + 1x^4$, $R = \mathbf{Z}$;

c. $f = 2x^0 + 1x^1 + 3x^2 + 0x^3 + 1x^4$, $R = \mathbf{Z}_3$;

d. $f = 0x^0 + 1x^1 + 3x^2 + 0x^3 + 1x^4 + 0x^5$, $R = \mathbf{Z}_3$;

e. $f = 0x^0 + 3x^1 + 3x^2 + 0x^3 + 6x^4$, $R = \mathbf{Z}_3$;

f. $f = 0x^0 + 3x^1 + 3x^2 + 0x^3 + 6x^4$, $R = \mathbf{Z}_8$.

3. Melyek konstans, és melyek lineáris polinomok az alábbiak közül:

a. $f = 2x^0 + 1x^1 + 3x^2 + 0x^3 + 1x^4 \in \mathbf{Z}[x]$;
b. $f = 2x^0 + 1x^1 + 3x^2 + 0x^3 + 1x^4 \in \mathbf{Z}_2[x]$;
c. $f = 2x^0 + 5x^1 + 10x^2 + 5x^3 + 5x^4 \in \mathbf{Z}_5[x]$;
d. $f = 5x^0 + 10x^1 + 12x^2 + 5x^3 + 5x^4 \in \mathbf{Z}_5[x]$;
e. $f = 5x^0 + 10x^1 + 12x^2 + 4x^3 + 3x^4 \in \mathbf{Z}_{12}[x]$;
f. $f = 5/2x^0 + 2\pi x^1 + \left(e - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\right) x^2 + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} x^3 \in \mathbf{C}[x]$.

3.1.3. Műveletek polinomokkal

4. Az alább megadott polinomokkal és konstanssal határozza meg

- $f+g$-t;
- $f-g$-t;
- cf-et;
- fg-t;
- gf-et.

a. $f = 3x^3 + 2x + 4$, $g = 2x^4 + 2x^2 + 5x$, $c = -3$, $R = \mathbf{Z}$;
b. $f = 3x^3 + 2x + 4$, $g = 2x^4 + 2x^2 + 5x$, $c = -3$, $R = \mathbf{Z}_5$;
c. $f = -4x^4 + 2x^2 + 11x$, $g = -12x^5 + 3x^3 + 2x - 8$,
$c = -3$, $R = \mathbf{Z}_6$;
d. $f = (4+2i)\,x^3 - \left(-1/2 + \sqrt{3}/2i\right) x^2 + 2x + \sqrt[3]{3}$,
$g = -ex^5 - (1+i)\,x^3 + 2x^2 + 5/2x - \sqrt{11}$, $c = -\pi/2$, $R = \mathbf{C}$;
e. $f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$,
$g = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$,
$c = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $R = \mathbf{Z}^{(2)}$;
f. $f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$,
$g = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$,
$c = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $R = \mathbf{Z}^{(2)}$;
g. $f = \begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1-3i & -3+i \\ 3+i & 1+3i \end{pmatrix}$,
$g = \begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4+i & 4-2i \\ -4-2i & 4-i \end{pmatrix}$,
$c = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$, $R = \mathbf{C}^{(2)}$;

h. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$g = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$c = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $R = \mathbf{Z}^{(4)}$;

i. $f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$,

$g = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$,

$c = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $R = \mathbf{Z}_5^{(2)}$;

j. $f = 48x^2 + 12x - 12$, $g = 30x^2 - 6x + 12$, $c = -15$, $R = \mathbf{Z}_{72}$;

k. $f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1,5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1,5 \end{pmatrix}$,

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1,2 & 2 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix}$, $R = \mathbf{R}^{(2)}$;

l. $f = \sum_{j=0}^{n} e^j x^j$, $g = \sum_{j=0}^{n} e^{-j} x^j$, $c = n$, $R = \mathbf{C}$;

m. $f = \sum_{j=0}^{n} e^{ij} x^j$, $g = \sum_{j=0}^{n} e^{-ij} x^j$, $c = n$, $R = \mathbf{C}$.

3.1.4. Polinom foka, főegyütthatója

5. Az eredménypolinom kiszámítása nélkül határozza meg az alábbi polinomok

- összegének
- különbségének
- szorzatának
  - fokát;
  - legkisebb fokú nem nulla együtthatós tagjának fokát;
  - főegyütthatóját.

a. $f = 2x^3 - 4x + 3$, $g = 7x^2 + 5x - 3$, $R = \mathbf{Z}$;

b. $f = 2x^3 - 4x + 3$, $g = 7x^2 + 5x - 3$, $R = \mathbf{Z}_3$;

c. $f = 2x^3 - 4x + 3$, $g = 7x^2 + 5x - 3$, $R = \mathbf{Z}_2$;

d. $f = 2x^3 - 4x^2$, $g = 2x^3 - 4x^2$, $R = \mathbf{Z}$;

e. $f = 2x^3 - 4x^2$, $g = 2x^3 - 4x$, $R = \mathbf{Z}$.

3.1.5. Maradékos osztás

6. Állapítsa meg, hogy az alábbi polinomokkal elvégezhető-e a maradékos osztás, és ahol igen, ott végezze el a műveletet (f-et osztjuk g-vel), továbbá döntse el, hogy f osztható-e g-vel.

a. $f = 2x^3 - 4x + 3$, $g = 7x^2 + 5x - 3$, $R = \mathbf{Z}$;
b. $f = 7x^2 + 5x - 3$, $g = 2x^3 - 4x + 3$, $R = \mathbf{Z}$;
c. $f = 2x^3 - 4x + 3$, $g = 7x^2 + 5x - 3$, $R = \mathbf{Q}$;
d. $f = 2x^3 - 4x + 3$, $g = 7x^2 + 5x - 3$, $R = \mathbf{Z}_5$;
e. $f = 2x^3 - 4x + 3$, $g = 4x^2 + 5x - 3$, $R = \mathbf{Z}_7$;
f. $f = 2x^3 - 4x + 3$, $g = 7x^2 + 5x - 3$, $R = \mathbf{Z}_8$;
g. $f = 4x^3 - 4x + 3$, $g = 3x^2 + 5x - 3$, $R = \mathbf{Z}_6$;
h. $f = 4x^3 - 4x + 3$, $g = 2x^2 + 5x - 3$, $R = \mathbf{Z}_6$;
i. $f = 4x^3 - x^2 + 3$, $g = 2x^2 + 5x - 3$, $R = \mathbf{Z}_6$;
j. $f = 4x^3 - 4x + 3$, $g = 12x^2 + 5x - 3$, $R = \mathbf{Z}_6$;
k. $f = 2/3x^5 - 7/8x + 4/7$, $g = 3/11x^3 + 2/9x + 1/5$, $R = \mathbf{Q}$;
l. $f = ex^2 - \ln 3x + \sin \pi/5$, $g = e^2x + \pi/3$, $R = \mathbf{R}$;
m. $f = 3,17x^4 - 2/7x + 10,121$, $g = 1,53x^2 + 1/8$, $R = \mathbf{R}$;
n. $f = 3,17x^4 - 2/7x + 10,121$, $g = 1,53x^2 + \sqrt[3]{10}$, $R = \mathbf{R}$;
o. $f = (3 + 2i)\,x^4 - (2 - 3i)\,x + (10 + i)$,
$g = (2 - 5i)\,x^2 + (3 + 7i)$, $R = \mathbf{C}$;
p. $f = \left(3 + 2\sqrt{10}\right) x^4 - \left(2 - 3\sqrt{10}\right) x + \left(10 + \sqrt{10}\right)$,
$g = \left(3 - \sqrt{10}\right) x^2 + \left(3 + 7\sqrt{10}\right)$, $R = \mathbf{H}_{10}$
$\left(\mathbf{H}_{10} = \left\{a + b\sqrt{10}\,\middle|\,(a, b) \in \mathbf{Z}^2\right\}\right)$;
q. $f = \left(3 + 2\sqrt{10}\right) x^4 - \left(2 - 3\sqrt{10}\right) x + \left(10 + \sqrt{10}\right)$,
$g = \left(1 - \sqrt{10}\right) x^2 + \left(3 + 7\sqrt{10}\right)$, $R = \mathbf{H}_{10}$;
r. $f = 6x^4 - 7x^3 - 10x^2 + 24x - 11$, $g = 2x^2 + x - 3$, $R = \mathbf{Z}$;
s. $f = 0$, $g = 5x - 7$, $R = \mathbf{Z}$;
t. $f = 2x^3 - 5x + 3$, $g = 0$, $R = \mathbf{Z}$;
u. $f = 0$, $g = 0$, $R = \mathbf{Z}$;
v. $f = 6x^2 - 5x + 3$, $g = 2x - 4$, $R = \mathbf{Z}$.

3.1.6. Polinom gyökei néhány gyök ismeretében

7. Határozza meg az alábbi polinomok valamennyi gyökét:

a. $f \in \mathbf{R}[x]$, $\deg(f) = 13$, f-nek a 0 egyszeres, $2/3$ és $-1/2 + i\sqrt{3}/2$ kétszeres és $1 + i$ háromszoros gyöke;
b. $f = \sum_{j=0}^{5} a_j x^j \in \mathbf{C}[x]$, $a_5 \neq 0$, $a_j = a_{5-j}$ és f-nek a 2 kétszeres gyöke;
c. $f = \sum_{j=0}^{5} a_j x^j \in \mathbf{C}[x]$, $a_5 \neq 0$, $a_j = -a_{5-j}$ és f-nek a 2 kétszeres gyöke;
d. $f = \sum_{j=0}^{5} a_j x^j \in \mathbf{C}[x]$, és $g = \sum_{j=0}^{5} a_{5-j} x^j$ gyökei 1, -1, -1, 3 és 4;

e. $f = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} 2^{5-j} x^j \in \mathbf{C}[x]$;

f. $f = x^5 + 2x^4 + x^3 + 6x^2 + 2x + 5 \in \mathbf{Z}_7[x]$;

g. $f = x^7 - 1 \in \mathbf{C}[x]$;

h. $f = x^6 - 1 \in \mathbf{Z}_7[x]$;

i. $f = x^7 - x \in \mathbf{Z}_7[x]$;

j. $f = x^7 - x \in \mathbf{C}[x]$;

k. $f = x^{12} - x^7 - x^5 + 1 \in \mathbf{C}[x]$;

l. $f = x^{21} - 3x^{14} + 3x^7 - 1 \in \mathbf{C}[x]$;

m. $f = x^2 - 5x \in \mathbf{Z}_6[x]$.

3.1.7. Polinom meghatározása a gyökeiből

8. Határozza meg azt az f polinomot, amelyre

a. $f \in \mathbf{R}[x]$, $\deg(f) \leq 7$, a polinom főegyütthatója 3, és f-nek a 2 és $3 - i$ egyszeres, $-1 + i$ kétszeres gyöke;

b. $f \in \mathbf{R}[x]$, $\deg(f) \leq 5$, f-nek a 3 kétszeres és -2 háromszoros gyöke, és $f(0) = 2$;

c. $f \in \mathbf{R}[x]$, $\deg(f) \leq 5$, f-nek a 3 kétszeres és -2 háromszoros gyöke, és $f(1) = 2$;

d. $f \in \mathbf{R}[x]$, $\deg(f) \leq 4$, $f(-2) = 2$, $f(-1) = 3$, $f(0) = 4$, $f(1) = 5$, $f(2) = 6$;

e. $f \in \mathbf{R}[x]$, $\deg(f) \leq 4$, $f(-2) = -2$, $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$;

f. $f \in \mathbf{R}[x]$, $\deg(f) \leq 4$, $f(-2) = -2$, $f(-1) = -1$, $f(0) = 3$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$;

g. $f \in \mathbf{C}[x]$, $\deg(f) \leq 3$, $f(-1-i) = -2$, $f(-1+i) = -1-i$, $f(1+i) = 3+i$, $f(1-i) = 1-i$;

h. $f \in \mathbf{Q}[x]$, $\deg(f) \leq 4$, $f(1/2) = -2$, $f(2) = -3/2$, $f(3) = -1/2$, $f(6) = -2$, $f(13/2) = 1$;

i. $f \in \mathbf{Z}_{11}[x]$, $\deg(f) \leq 4$, $f(2) = -2$, $f(5) = -3$, $f(6) = -1$, $f(8) = -2$, $f(9) = 1$;

j. $f \in \mathbf{Z}[x]$, $\deg(f) \leq 4$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = 2$, $f(4) = -2$;

k. $f \in \mathbf{Z}_5[x]$, $\deg(f) \leq 4$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = 2$, $f(4) = -2$;

l. $f \in \mathbf{Z}_7[x]$, $\deg(f) \leq 4$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = 2$, $f(4) = -2$;

m. $f \in \mathbf{R}[x]$, $\deg(f) \leq 4$

- **i.** $f(-2) = -2$, $f(-1) = -1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$;
- **ii.** $f(-2) = -2$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$;
- **iii.** $f(-2) = 2$, $f(-1) = -4$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = -1$;
- **iv.** $f(-2) = 0$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$;

n. $f \in \mathbf{Z}[x]$, $\deg(f) = 5$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(4) = 0$, és a polinom főegyütthatója 2;

o. $f \in \mathbf{Z}_5[x]$, $\deg(f) = 5$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(4) = 0$, és a polinom főegyütthatója 2;

p. $f \in \mathbf{Z}[x]$, $\deg(f) \leq 3$, $f(-2) = 5$, $f(1) = -3$, $f(2) = -5$, $f(4) = 2$;

q. $f \in \mathbf{Z}[x]$, $\deg(f) \leq 3$, $f(-2) = 5$, $f(1) = -3$, $f(4) = 2$;

r. $f \in \mathbf{Z}[x]$, $f(-2) = 5$, $f(1) = -3$, $f(4) = 2$.

3.1.8. Gyökök és együtthatók kapcsolata

9. A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján határozza meg azt az f polinomot, amelyre

a. $f \in \mathbf{Z}[x]$, $\deg(f) = 3$, a polinom főegyütthatója -4, három gyök u_1, u_2 és u_3, és $u_1u_2u_3 = 5$, $u_1 + u_2 + u_3 = -1$ és $u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = 4$;

b. $f \in \mathbf{Z}_7[x]$, $\deg(f) = 3$, a polinom főegyütthatója 3, három gyök u_1, u_2 és u_3, és $u_1u_2u_3 = -2$, $u_1 + u_2 + u_3 = -1$ és $u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = -3$;

c. $f \in \mathbf{Z}[x]$, $\deg(f) = 3$, a polinom főegyütthatója -4, három gyök u_1, u_2 és u_3, és $u_1u_2u_3 = 5$, $u_1 + u_2 + u_3 = -1$ és $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 7$;

d. $f \in \mathbf{Z}_7[x]$, $\deg(f) = 3$, a polinom főegyütthatója -4, három gyök u_1, u_2 és u_3, és $u_1 = -2$, $u_2u_3 = 5$ és $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 2$;

e. $f \in \mathbf{Z}_7[x]$, $\deg(f) = 3$, a polinom főegyütthatója -4, három gyök u_1, u_2 és u_3, és $u_1 + u_2 + u_3 = -1$, $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 2$ és $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 = 2$;

f. $f \in \mathbf{Z}[x]$, $\deg(f) = 3$, a polinom főegyütthatója 2, három gyök u_1, u_2 és u_3, és $u_1u_2u_3 = -5$, $u_1 + u_2 + u_3 = 3$ és $u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = 2$;

g. $f \in \mathbf{Z}[x]$, $\deg(f) = 3$, a polinom főegyütthatója 3, három gyök u_1, u_2 és u_3, és $u_1u_2u_3 = 5$, $u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = 9$ és $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 7$;

h. $f \in \mathbf{Q}[x]$, $f(u_1) = f(u_2) = f(u_3) = 0$, $u_1 + u_2 + u_3 = 2$, $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = -5$, $u_1u_2u_3 = -6$;

i. $f \in \mathbf{Q}[x]$, $f(u_1) = f(u_2) = f(u_3) = 0$, $u_1 + u_2 + u_3 = 2$, $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 14$, $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 = 20$;

3.1.9. Horner-módszer

10. Határozza meg $f(u)$-t, $g(u)$-t, $f(u)+g(u)$-t, $(f+g)(u)$-t, $f(u)\,g(u)$-t, $(fg)(u)$-t, $g(u)\,f(u)$-t és $(gf)(u)$-t, ha f és g az R gyűrű feletti polinomok, és $u \in R$.

a. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$, $g = -2x^3 + 5x - 11$, $u = 3$, $R = \mathbf{Z}$;

b. $f = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$, $g = -2x^3 + 5x^2 - 11$, $u = -2$, $R = \mathbf{Z}$;

c. $f = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$, $g = -2x^2 + 5x - 11$, $u = 1/2$, $R = \mathbf{Q}$;

d. $f = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$, $g = -2x^2 + 5x - 11$, $u = 1 - i$, $R = \mathbf{C}$;

e. $f = (2-i)\,x^2 - (7+i)\,x + (2+4i)$, $g = (-2+2i)\,x^3 + (5-i)\,x - (1+i)$, $u = (1-2i)$, $R = \mathbf{C}$;

f. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$, $g = -2x^3 + 5x - 11$, $u = 3$, $R = \mathbf{Z}_3$;

g. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$, $g = -2x^3 + 5x - 11$, $u = 3$, $R = \mathbf{Z}_5$;

h. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$, $g = -2x^3 + 5x - 11$, $u = 3$, $R = \mathbf{Z}_6$;

i. $f = x - 2$, $g = x - 3$, $u = 5$, $R = \mathbf{Z}_6$;

j. $f = x^2 - x + 1$, $g = x^2 + x + 1$, $R = \mathbf{C}$

- **i.** $u = -1$;
- **ii.** $u = -1/2 + i\sqrt{3}/2$;
- **iii.** $u = 1/2 + i\sqrt{3}/2$;

k. $f = x^3 - 1$, $g = x^3 + 1$, $u = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, $R = \mathbf{C}$;

l. $f = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $g = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $u = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, $R = \mathbf{C}$;

m. $f = x^2 - x + 1$, $g = x^2 + x + 1$, $R = \mathbf{Q}^{(2)}$

- **i.** $u = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$;
- **ii.** $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;
- **iii.** $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

n. $f = x^2 - 2x - 7$, $g = x^2 + 2x - 7$, $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \mathbf{Q}^{(2)}$;

o. $f = x + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $g = x - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $R = \mathbf{C}^{(2)}$

- **i.** $u = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$;
- **ii.** $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;
- **iii.** $u = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$;
- **iv.** $u = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2i & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2i \end{pmatrix}$;
- **v.** $u = \begin{pmatrix} ai & b \\ -\bar{b} & -ai \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{C}$, $\det \begin{pmatrix} ai & b \\ -\bar{b} & -ai \end{pmatrix} = 1$;

p. $f = x - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $g = x - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $R = \mathbf{Z}^{(2)}$.

3.1.10. Maradékos osztás elsőfokú polinommal és a Horner-módszer

11. Határozza meg az alábbi maradékos osztások hányadosát és maradékát:

a. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$

- **i.** $g = x - 3$, $R = \mathbf{Z}$;
- **ii.** $g = x + 2, R = \mathbf{Z}$;
- **iii.** $g = x - 1/2, R = \mathbf{Q}$;

b. $f = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$, $g = x - (1 - i)\,, R = \mathbf{C}$;

c. $f = (2-i)\,x^2 - (7+i)\,x + (2+4i)$, $g = x - (1-2i)\,, R = \mathbf{C}$;

d. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$, $g = x - 3$,

  i. $R = \mathbf{Z}_3$;

  ii. $R = \mathbf{Z}_5$;

  iii. $R = \mathbf{Z}_6$;

e. $f = x - 2$, $g = x - 5$, $R = \mathbf{Z}_6$;

f. $f = x^2 - x + 1$, $R = \mathbf{C}$

  i. $g = x + 1$;

  ii. $g = x - \left(-1/2 + i\sqrt{3}/2\right)$;

  iii. $g = x - \left(1/2 + i\sqrt{3}/2\right)$;

g. $f = x^3 - 1$, $g = x - \left(-1/2 + i\sqrt{3}/2\right)$, $R = \mathbf{C}$;

h. $f = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $g = x - \left(1/2 + i\sqrt{3}/2\right)$, $R = \mathbf{C}$;

i. $f = 2/3x^3 - 5/4x + 1/5$, $g = x - 2/5$.

3.1.11. Derivált helyettesítési értéke

12. Deriválás nélkül határozza meg az alábbi polinomok k-adik deriváltjának helyettesítési értékét a megadott pontokban:

a. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$, $u = 3$, $k = 1$, $R = \mathbf{Z}$;

b. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$, $u = 3$, $k = 2$, $R = \mathbf{Z}_4$;

c. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$, $u = 3$, $k = 3$, $R = \mathbf{Z}_3$;

d. $f = 3x^5 - 7x^3 + 5x - 8$, $u = -2$, $k = 4$, $R = \mathbf{Q}$;

e. $f = 5x^6 - 11x^5 + 6x^4 + 2x^2 - 31x + 17$, $u = -7$, $k = 4$, $R = \mathbf{Z}_2$.

3.1.12. Polinomfüggvények véges testek felett

13. Igazolja, hogy

a. $\mathbf{Z}_p$ fölött az x^p-hez és x-hez tartozó polinomfüggvény azonos;

b. a q-elemű test fölött az x^q-hoz és x-hez tartozó polinomfüggvény azonos;

c. $\mathbf{Z}_p$ fölött az $f \in \mathbf{Z}_p[x]$-hez és az $f + g \cdot (x^p - x)$-hez tartozó polinomfüggvény azonos, ahol g tetszőleges $\mathbf{Z}_p$ fölötti polinom;

d. a q-elemű K test fölött az $f \in \mathbf{Z}_p[x]$-hez és az $f + g \cdot (x^q - x)$-hez tartozó polinomfüggvény azonos, ahol g tetszőleges K fölötti polinom;

e. $\mathbf{Z}_p$ fölött pontosan p^p különböző egyhatározatlanú polinomfüggvény van;

f. a q-elemű test fölött pontosan q^q különböző egyhatározatlanú polinomfüggvény van;

g. megadható egy bijekció a $\mathbf{Z}_p$ fölötti legfeljebb $p-1$-edfokú polinomokhoz tartozó polinomfüggvények és a $\mathbf{Z}_p$-t önmagába képező egyváltozós függvények között;

h. megadható egy bijekció a q-elemű K test fölötti legfeljebb $q-1$-edfokú polinomokhoz tartozó polinomfüggvények és a K-t önmagába képező egyváltozós függvények között;

i. a $\mathbf{Z}_p$ fölötti f polinom $\mathbf{Z}_p$-beli gyökeinek halmaza azonos $f \bmod (x^p - x)$ gyökeinek halmazával;

j. a q-elemű K test fölötti f polinom K-beli gyökeinek halmaza azonos f mod $(x^q - x)$ gyökeinek halmazával;

k. a $\mathbf{Z}_p$ fölötti f polinom $\mathbf{Z}_p$-beli nem nulla gyökeinek halmaza azonos f mod $\left(x^{p-1} - \overline{1}\right)$ gyökeinek halmazával;

l. a q-elemű K test fölötti f polinom K-beli nem nulla gyökeinek halmaza azonos f mod $\left(x^{q-1} - e\right)$ gyökeinek halmazával;

m. a $\mathbf{Z}_p$ fölötti $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polinom $\mathbf{Z}_p$-beli nem nulla gyökeinek halmaza azonos a $g = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i \bmod (p-1)}$ polinom $\mathbf{Z}_p$-beli nem nulla gyökeinek halmazával;

n. a q-elemű K test fölötti f polinom K-beli nem nulla gyökeinek halmaza azonos a $g = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i \bmod (q-1)}$ polinom K-beli nem nulla gyökeinek halmazával;

o. a $\mathbf{Z}_p$ fölötti f polinom $\mathbf{Z}_p$-beli gyökeinek halmaza azonos $d = (f, x^p - x)$ gyökeinek halmazával;

p. a q-elemű K test fölötti f polinom K-beli gyökeinek halmaza azonos $d = (f, x^q - x)$ gyökeinek halmazával;

q. a $\mathbf{Z}_p$ fölötti f polinom $\mathbf{Z}_p$-beli nem nulla gyökeinek halmaza azonos $d = \left(f, x^{p-1} - \overline{1}\right)$ gyökeinek halmazával;

r. a q-elemű K test fölötti f polinom K-beli nem nulla gyökeinek halmaza azonos $d = \left(f, x^{q-1} - e\right)$ gyökeinek halmazával.

3.1.13. Polinom deriváltja

14. Határozza meg az alábbi polinom deriváltját.

a. $f = 3x^7 - 5x^2 + 2x + 7$, $R = \mathbf{Z}$;

b. $f = 3x^7 - 5x^2 + 2x + 7$, $R = \mathbf{Z}_3$;

c. $f = 3x^7 - 5x^2 + 2x + 7$, $R = \mathbf{Z}_7$;

d. $f = 3x^7 - 5x^2 + 2x + 7$, $R = \mathbf{Q}$;

e. $f = (x - 3)^m$, m egy pozitív egész szám, $R = \mathbf{Z}$;

f. $f = (x - 3)^m$, m egy pozitív egész szám, $R = \mathbf{Z}_3$;

g. $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{pi}$, $R = \mathbf{Z}_p$;

h. $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $R = \mathbf{Z}_2$.

15. Lehet-e

a. egy legalább elsőfokú polinom deriváltja a nullpolinom;

b. egy $1 < n$-edfokú polinom deriváltja legfeljebb $n - 2$-fokú?

3.1.14. Legnagyobb közös osztó és lineáris kombinációs előállítása

16. Határozza meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját, és a legnagyobb közös osztót írja fel a megadott két polinom lineáris kombinációjaként.

a. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 2x^3 - 2x - 3,\ R = \mathbf{Q}$;

b. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 2x^3 - 2x - 3,\ R = \mathbf{Z}_7$;

c. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 2x^3 - 2x - 3,\ R = \mathbf{Z}_{11}$;

d. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 2x^3 - 2x - 3,\ R = \mathbf{Z}_5$;

e. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 2x^3 - 2x - 3,\ R = \mathbf{Z}_2$;

f. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 2x^3 - 2x - 3,\ R = \mathbf{Z}_3$;

g. $f = (3-i)x^4 - (1+3i)x^3 + (-2+4i)x^2 + (5-5i)x - (7+i)$,
$g = (4-3i)x^3 - 5x^2 + (3-i)x - (3-i),\ R = \mathbf{C}$;

h. $f = 1/2x^4 - 3/2x^3 + 25/9x^2 - 26/9x - 4/3,\ g = 2x^3 - 19/3x^2 + 11/3x + 2$,
$R = \mathbf{Q}$;

i. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 4x^3 + 25x^2 - 15x - 9,\ R = \mathbf{Z}_5$;

j. $f = 4x^4 - 12x^3 - 3x^2 + 18x + 9,\ g = 2x^2 - 3x - 3,\ R = \mathbf{Z}_5$;

k. $f = -4x^4 + 9x^3 + 4x^2 - 20x + 16,\ g = -14x^5 + 10x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 12x - 8$,
$R = \mathbf{Z}_7$;

l. $f = 5x^5 - 10x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 10x - 3,\ g = 4x^4 + 3x^3 - 4x - 3,\ R = \mathbf{Q}$;

m. $f = 5x^5 - 10x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 10x - 3,\ g = 4x^4 + 3x^3 - 4x - 3,\ R = \mathbf{Z}_5$;

n. $f = 5x^5 - 10x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 10x - 3,\ g = 4x^4 + 3x^3 - 4x - 3,\ R = \mathbf{Z}_7$;

o. $f = 5x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 20x^3 - x^2 - 10x + 3$,
$g = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4x + 3,\ R = \mathbf{Q}$;

p. $f = 5x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 20x^3 - x^2 - 10x + 3$,
$g = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4x + 3,\ R = \mathbf{Z}_5$;

q. $f = 5x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 20x^3 - x^2 - 10x + 3$,
$g = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4x + 3,\ R = \mathbf{Z}_7$.

17. A gyökök meghatározása nélkül döntse el, hogy van-e közös gyöke az alábbi polinomoknak, és ha lehet, akkor határozza is meg a közös gyököket (illetve azokat a közös gyököket, amelyek meghatározhatóak).

a. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 2x^3 - 2x - 3,\ R = \mathbf{Q}$;

b. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 2x^3 - 2x - 3,\ R = \mathbf{Z}_7$;

c. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 2x^3 - 2x - 3,\ R = \mathbf{Z}_{11}$;

d. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 2x^3 - 2x - 3,\ R = \mathbf{Z}_5$;

e. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 2x^3 - 2x - 3,\ R = \mathbf{Z}_2$;

f. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 2x^3 - 2x - 3,\ R = \mathbf{Z}_3$;

g. $f = (3-i)x^4 - (1+3i)x^3 + (-2+4i)x^2 + (5-5i)x - (7+i)$,
$g = (4-3i)x^3 - 5x^2 + (3-i)x - (3-i),\ R = \mathbf{C}$;

h. $f = 1/2x^4 - 3/2x^3 + 25/9x^2 - 26/9x - 4/3,\ g = 2x^3 - 19/3x^2 + 11/3x + 2$,
$R = \mathbf{Q}$;

i. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3,\ g = 4x^3 + 25x^2 - 15x - 9,\ R = \mathbf{Z}_5$;

j. $f = 4x^4 - 12x^3 - 3x^2 + 18x + 9,\ g = 2x^2 - 3x - 3,\ R = \mathbf{Z}_5$;

k. $f = -4x^4 + 9x^3 + 4x^2 - 20x + 16$, $g = -14x^5 + 10x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 12x - 8$, $R = \mathbf{Z}_7$;

l. $f = 5x^5 - 10x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 10x - 3$, $g = 4x^4 + 3x^3 - 4x - 3$, $R = \mathbf{Q}$;

m. $f = 5x^5 - 10x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 10x - 3$, $g = 4x^4 + 3x^3 - 4x - 3$, $R = \mathbf{Z}_5$;

n. $f = 5x^5 - 10x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 10x - 3$, $g = 4x^4 + 3x^3 - 4x - 3$, $R = \mathbf{Z}_7$;

o. $f = 5x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 20x^3 - x^2 - 10x + 3$,
$g = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4x + 3$, $R = \mathbf{Q}$;

p. $f = 5x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 20x^3 - x^2 - 10x + 3$,
$g = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4x + 3$, $R = \mathbf{Z}_5$;

q. $f = 5x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 20x^3 - x^2 - 10x + 3$,
$g = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4x + 3$, $R = \mathbf{Z}_7$;

3.1.15. Többszörös gyök

18. A gyökök meghatározása nélkül döntse el, hogy van-e többszörös gyöke az alábbi polinomoknak, és ha lehet, akkor határozza meg a többszörös gyököket.

a. $f = 2x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 26x^2 - 4x + 24$, $R = \mathbf{Q}$;

b. $f = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$, $R = \mathbf{Q}$;

c. $f = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$, $R = \mathbf{Z}_5$;

d. $f = 2x^5 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 2$, $R = \mathbf{Z}_5$;

e. $f = 2x^5 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 2$, $R = \mathbf{Z}_7$;

f. $f := x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 2$, $R = \mathbf{Z}_3$;

g. $f = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x, R = \mathbf{Z}_3$;

h. $f = x^{10} + 3x^5 + 1$, $R = \mathbf{Z}_5$.

3.1.16. Racionális együtthatós polinom racionális gyökei

19. Határozza meg az alábbi polinomok racionális gyökeit.

a. $f = 2/3x^6 + 1/2x^5 - x^4 - 3/2x^3 - 1/2x^2 + x + 5/6$;

b. $f = 2/3x^6 - 10/9x^5 - 2/3x^4 + 4/9x^3 + 10/9x^2 + 2/3x - 10/9$;

c. $f = 2/3x^6 - 7/18x^5 - 34/27x^4 - 56/27x^3 - 1/9x^2 + 245/54x + 25/9$;

d. $f = 3x^7 - 2x^4 + 4x^2 + x - 7$;

e. $f = 5/2x^{10} - 15/2x^9 - 365/32x^8 + 295/32x^7 + 385/8x^6 + 1275/16x^5 + 675/32x^4 - 1485/32x^3 - 405/16x^2$;

f. $f = 3x^8 - 23/4x^7 - 11x^6 + 45/4x^5 - 33/4x^4 - 333/8x^3 - 39/4x^2 + 135/8x + 27/4$.

3.1.17. Polinom felbontása

20. Döntse el az alábbi polinomokról, hogy felbonthatóak-e a megadott gyűrű fölött, és ha lehet, bontsa is fel a polinomot.

a. $f = 2/3x^6 + 1/2x^5 - x^4 - 3/2x^3 - 1/2x^2 + x + 5/6$; $R = \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$;

b. $f = 2/3x^6 - 10/9x^5 - 2/3x^4 + 4/9x^3 + 10/9x^2 + 2/3x - 10/9$;
$R = \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$;

c. $f = 2/3x^6 - 7/18x^5 - 34/27x^4 - 56/27x^3 - 1/9x^2 + 245/54x + 25/9$; $R = \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$;

d. $f = 3x^7 - 2x^4 + 4x^2 + x - 7$; $R = \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$;

e. $f = 5/2x^{10} - 15/2x^9 - 365/32x^8 + 295/32x^7 + 385/8x^6 + 1275/16x^5 + 675/32x^4 - 1485/32x^3 - 405/16x^2$; $R = \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$;

f. $f = 3x^8 - 23/4x^7 - 11x^6 + 45/4x^5 - 33/4x^4 - 333/8x^3 - 39/4x^2 + 135/8x + 27/4$;; $R = \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$;

g. $f = 3x^8 + 4x^7 - 5x^6 - 22/3x^5 - 2/3x^4 + 2/3x^2 + 4/3x$; $R = \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$;

h. $f = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; $R = \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$;

i. $f = 12x^3 - 8x + 9$; $R = \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$;

3.1.18. Gyűrű és a gyűrű fölötti polinomgyűrű kapcsolata

21. **a.** Legyen R gyűrű. Mutassa meg, hogy ha $R[x]$ legalább két elemet tartalmazó euklideszi gyűrű, akkor R test.

b. Legyen R legalább kételemű integritási tartomány. Mutassa meg, hogy R és $R[x]$ karakterisztikája azonos.

3.1.19. Helyettesítési érték

22. Határozza meg az $f(\alpha)$ helyettesítési értékeket:

a. $f = 2x^3 + 3x - 7 \in \mathbf{Z}[x]$

- **i.** $\alpha = 5$;
- **ii.** $\alpha = 5/2$;
- **iii.** $\alpha = 2,5$;
- **iv.** $\alpha = 1/3$;
- **v.** $\alpha = 3$;
- **vi.** $\alpha = 2\pi/3$;
- **vii.** $\alpha = 3 - 2i$;
- **viii.** $\alpha = 3 + 2i$;
- **ix.** $\alpha = (2, 2\pi/3)$;
- **x.** $\alpha = (2, -2\pi/3)$;

b. $f = -7x^3 + 3x^2 + 2 \in \mathbf{Z}[x]$

- **i.** $\alpha = 1/3$;
- **ii.** $\alpha = 3$;
- **iii.** $\alpha = (1/2, -2\pi/3)$;
- **iv.** $\alpha = (1/2, 2\pi/3)$;

c. $f = x^2 + x + 1 \in \mathbf{Z}[x]$

- **i.** $\alpha = (1, \pi/3)$;
- **ii.** $\alpha = (1, -\pi/3)$;
- **iii.** $\alpha = (1, 2\pi/3)$;
- **iv.** $\alpha = (1, -2\pi/3)$;

d. $f = x^2 - x + 1 \in \mathbf{Z}[x]$

i. $\alpha = (1, \pi/3)$;

ii. $\alpha = (1, -\pi/3)$;

iii. $\alpha = (1, 2\pi/3)$;

iv. $\alpha = (1, -2\pi/3)$;

e. $f = (1-i)x^2 + (-2+3i)x + (4-2i) \in \mathbf{C}[x]$

i. $\alpha = 2 + i$;

ii. $\alpha = 2 - i$;

f. $f = (1+i)x^2 + (-2-3i)x + (4+2i) \in \mathbf{C}[x]$

i. $\alpha = 2 + i$;

ii. $\alpha = 2 - i$;

g. $f = \left(x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right)\left(x + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right) \in \mathbf{Z}^{(2)}[x]$,
$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

h. $f = x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^{(2)}[x]$,
$g = x + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^{(2)}[x]$, $\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;
hasonlítsa össze ezt az eredményt az előző pont eredményével, és magyarázza meg, amit tapasztal;

i. $f = x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \in \mathbf{C}[x]$, $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

j. $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$, $\alpha = \mathbf{A} \in R^{(n)}$,
$0 \leq i < n \wedge 0 \leq j < n : A_{i,j} = \delta_{i-1,j} e - \delta_{n-1,j} a_i$ ($\mathbf{A}$ az f *kísérőmátrixa*).

3.1.20. Polinom és deriváltja többszörös gyökei

23. Határozza meg, hogy u hányszoros gyöke f-nek és f deriváltjának.

a. $f = x^2 - 1$, $u = 1$, $R = \mathbf{Z}$;

b. $f = x^2 - 1$, $u = 1$, $R = \mathbf{Z}_3$;

c. $f = x^2 - 1$, $u = 1$, $R = \mathbf{Z}_2$;

d. $f = x^4 - 2x^2 + 1$, $u = 1$, $R = \mathbf{Z}$;

e. $f = x^4 - 2x^2 + 1$, $u = 1$, $R = \mathbf{Z}_3$;

f. $f = x^4 - 2x^2 + 1$, $u = 1$, $R = \mathbf{Z}_2$;

g. $f = (x-u)^k g$, $g(u) \neq 0$, $R = \mathbf{Z}$;

h. $f = (x-u)^k g$, $g(u) \neq 0 \wedge p \nmid k$, $R = \mathbf{Z}_p$;

i. $f = (x-u)^{kp} g$, $g(u) \neq 0$, $R = \mathbf{Z}_p$;

j. $f = (x-u)^{kp} g^p + (x-u)^l h$, $g(u) \neq 0 \neq h(u) \wedge p \nmid l$, $R = \mathbf{Z}_p$.

4. Megoldások

4.1. Polinomok

4.1.1. Polinom – nem polinom

1. A polinom a nem negatív egész számok halmazának egy gyűrűbe való olyan leképezése, ahol csak véges sok elem képe nem nulla. A nullpolinomban minden tag 0, ennek a polinomnak nincs foka, egyébként a legnagyobb indexű nem 0 tag indexe a polinom foka.

1.a. Nem polinom, mert nem $\mathbf{N}_0$ az értelmezési tartomány.

1.b. Nem polinom, mert a nem 0 tagok száma nem véges (tudniillik csak a 0-indexű tag 0).

1.c. Nem polinom, mert a nem 0 tagok száma nem véges (tudniillik csak a 0-indexű tag 0). A feladat azonos **1.b.**-vel, csak a sorozat elemeinek a jelölése más.

1.d.

$$\begin{aligned}
f_0 &= \left\lfloor \frac{20}{2^0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{1} \right\rfloor = 20 \\
f_1 &= \left\lfloor \frac{20}{2^1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{2} \right\rfloor = 10 \\
f_2 &= \left\lfloor \frac{20}{2^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor = 5 \\
f_3 &= \left\lfloor \frac{20}{2^3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{8} \right\rfloor = 2 \\
f_4 &= \left\lfloor \frac{20}{2^4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{16} \right\rfloor = 1 \\
f_i &\leq \left\lfloor \frac{20}{2^5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{32} \right\rfloor = 0, \text{ ha } i \geq 5
\end{aligned}$$

tehát $f = 20 + 10x + 5x^2 + 2x^3 + x^4$, $\deg f = 4$.

1.e.

$$\begin{aligned}
f_0 &= \prod_{j=0}^{0} (n-j) = n \\
f_i &= \prod_{j=0}^{i} (n-j) = \left(\prod_{j=0}^{i-1} (n-j) \right) (n-i) = f_{i-1} \cdot (n-i)\,, \text{ ha } 0 < i < n \\
f_n &= f_{n-1} \cdot (n-n) = 0 \\
f_i &= f_{i-1} \cdot (n-i) = 0 \cdot (n-i) = 0, \text{ ha } n < i
\end{aligned}$$

tehát

$$f = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-i)!} x^i, & n > 0 \quad \deg f = n-1 \end{cases}$$

mert

$$f_i = \prod_{j=0}^{i} (n-j) = \prod_{j=n-i}^{n} j = \frac{\prod_{j=1}^{n} j}{\prod_{j=1}^{n-i-1} j} = \frac{n!}{(n-1-i)!}, \text{ ha } 0 < i < n$$

1.f. 1.e. megoldásából látszik, hogy ez a feladat azonos az előzővel, csupán másként írtuk fel a sorozat elemeit.

1.g. $\frac{1}{i+1} < 1$, ha $i > 0$, így $i > 0$, esetén $\left(1 - \frac{1}{i+1}\right) > 0$, és akkor $\left(1 - \frac{1}{i+1}\right)^{i+1}$ is nagyobb 0-nál, vagyis a sorozatnak csupán a 0-indexű tagja 0, a sorozatban a nem 0 tagok száma nem véges, ezért ez nem polinomot definiál.

1.h.

Ha $0 \leq i < 7$, akkor $3^{2-i} > 3^{2-7} = 3^{-5}$, tehát $3^{-5} - 3^{2-i} < 0$, és $f_i = 1 - \operatorname{sign}\left(3^{-5} - 3^{2-i}\right) = 1 - (-1) = 2$, ha $i = 7$, akkor $3^{-5} - 3^{2-7} = 3^{-5} - 3^{-5} = 0$, és $f_7 = 1 - \text{sign}(0) = 1$

$i > 7$ esetén $3^{2-i} < 3^{2-7} = 3^{-5}$, azaz $3^{-5} - 3^{2-i} > 0$, és ebben az esetben $f_i = 1 - \text{sign}\left(3^{-5} - 3^{2-i}\right) = 1 - 1 = 0$, tehát

$$f = x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$$

1.i. $|f_0| = 1$, $\left|\varepsilon_1^{(n)}\right| = 1$, és ha $|f_{i-1}| = 1$, akkor $\left|\overline{f_{i-1}}\right| = 1$ (a felülhúzás most a komplex konjugálást jelöli), így

$$|f_i| = \left|\overline{f_{i-1}}\varepsilon_1^{(n)}\right| = \left|\overline{f_{i-1}}\right| \left|\varepsilon_1^{(n)}\right| = 1 \cdot 1 = 1$$

tehát $f_i \neq 0$, a sorozat valamennyi együtthatója különbözik nullától, a sorozatban a nem 0 tagok száma nem véges, ezért ez nem polinomot definiál.

1.j.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{1-1}^{(1)} = \varepsilon_0^{(n)} = 1 = 1^2 = \left(\varepsilon_1^{(1)}\right)^2 &= \varepsilon_2^{(1)} \\
f_1 &= 1 - 1 \cdot 1 = 0 \\
f_{2k} = 1 &\Longrightarrow f_{2k+1} = 1 - 1 \cdot 1 = 0 \\
f_{2k+1} = 0 &\Longrightarrow f_{2k+2} = 1 - 0 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

vagyis a sorozat minden páros indexű tagja 1, a sorozatban a nem 0 tagok száma nem véges, ezért ez nem polinomot definiál.

1.k.

$$\begin{aligned}
&0! = 1 \neq 0 \\
&i! \neq 0 \wedge i + 1 \neq 0 \Longrightarrow (i+1)! = i! \cdot (i+1) \neq 0, \text{ ha } i \geq 0
\end{aligned}$$

a sorozat minden tagja különbözik nullától, a sorozatban a nem 0 tagok száma nem véges, ezért ez nem polinomot definiál.

1.l. $\mathbf{Z}_m$-ben (a k-val reprezentált maradékosztályt $\overline{k}$-sal jelölve) $\overline{m} = \overline{0}$, így

$$f_{m+k} := \overline{(m+k)!} = \overline{(m-1)!} \cdot \overline{m} \cdot \prod_{i=m+1}^{m+k} \overline{i} = \overline{0}$$

tehát $i \geq m$-re $f_i = \overline{0}$, a sorozat polinomot definiál. Ha m kanonikus felbontása $m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{r_i}$, ahol a p_i-k páronként különböző prímszámok, akkor a polinom foka

$$\deg f = \min\left\{ k \in \mathbf{N}^+ \,\middle|\, \forall\,(1 \leq i \leq s) : \sum_{j=1}^{m} \left\lfloor \frac{k}{p_i^j} \right\rfloor \geq r_i \right\} - 1$$

és pontosan $m-1$, ha m prímszám. Ekkor $f = \overline{(m-1)!}x^{m-1} + \cdots + x^1 + \overline{1}$ (egyébként ha m prímszám, akkor Wilson tétele szerint $\overline{(m-1)!} = \overline{m-1}$, továbbá $\overline{(4-1)!} = \overline{2}$, és 2-nél nagyobb összetett m esetén $\overline{(m-1)!} = \overline{0}$).

1.m. Ha $0 \notin \operatorname{Im}\varphi$, akkor $\forall (i \in \mathbf{N}_0)$-ra $\varphi(i) \neq 0$, így $f_i = \prod_{j=0}^{i} \varphi(j) \neq 0$, a 0-tól különböző tagok száma nem véges, ezért ez nem polinomot definiál. Amennyiben $\varphi(0) = 0$, akkor $\forall (i \in \mathbf{N}_0)$-ra $f_i = \prod_{j=0}^{i} \varphi(j) = \varphi(0) \prod_{j=1}^{i} \varphi(j) = 0$, és f a nullpolinom. Végül ha $0 \in \operatorname{Im}\varphi$, és $\min\{k \in \mathbf{N}^+ \,|\varphi(k) = 0\} = l > 0$, akkor $0 \leq i < l$-re $f_i = \prod_{j=0}^{i} \varphi(j) \neq 0$, míg $i \geq l$ esetén $f_i = \prod_{j=0}^{l-1} \varphi(j) \cdot \varphi(l) \cdot \prod_{j=l+1}^{i} \varphi(j) = 0$, tehát f polinom, $\deg f = l - 1$, és $f = \sum_{i=0}^{l-1} \prod_{j=0}^{i} \varphi(j)\, x^i$.

1.n. Tetszőleges valós a és b számra $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq a + b$, ezért $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor$, így $\lfloor 10^{i+1}\pi \rfloor \geq 10 \lfloor 10^i \pi \rfloor$, és

$$\frac{f_{i+1}}{f_i} = \frac{10^{-(i+1)} \lfloor 10^{i+1}\pi \rfloor}{10^{-i} \lfloor 10^i \pi \rfloor} \geq 1$$

a sorozat monoton nő. Mivel $f_0 = \lfloor \pi \rfloor = 3 > 0$, ezért az előbbi eredmény azt jelenti, hogy a sorozat minden tagja pozitív, a sorozat minden tagja különbözik nullától, a sorozatban a nem 0 tagok száma nem véges, ezért ez nem polinomot definiál. (Egyébként a sorozat i-edik eleme a π első $i + 1$ jegyéből álló szám, amely természetesen mindig pozitív.)

1.o. $f_i := \lfloor 10^i \pi \rfloor$ a π első $i + 1$ jegyéből álló egész szám, és ezt tízzel osztva ennek a jobb szélső jegyét, azaz π $i+1$-edik jegyét kapjuk. Mivel π irracionális, ezért bármilyen nagy indexű tag után van nem 0 tag, így a nem 0 tagok száma nem véges, a sorozat nem polinomot definiál.

1.p. Most $f_i := \lfloor 10^i \pi \rfloor \bmod 10^i$ a π tizedestört felírásának első i jegyéből álló egész szám. Ez a sorozat monoton nő, és $f_1 = 1 > 0$, ezért a sorozat minden tagja pozitív, a sorozat minden tagja különbözik nullától, a sorozatban a nem 0 tagok száma nem véges, ezért ez nem polinomot definiál.

1.q.

$$f_0 = \begin{pmatrix} e & e & e \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & (0+1)\,e & \frac{(0+1)(0+2)}{2} e \\ 0 & e & (0+1)\,e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix},$$

és ha

$$f_i = \begin{pmatrix} e & (i+1)\,e & \frac{(i+1)(i+2)}{2} e \\ 0 & e & (i+1)\,e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix},$$

akkor

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= \begin{pmatrix} e & (i+1)\,e & \frac{(i+1)(i+2)}{2} e \\ 0 & e & (i+1)\,e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & e & e \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & (i+2)\,e & \frac{(i+2)(i+3)}{2} e \\ 0 & e & (i+2)\,e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A mátrix főátlójában álló elemek nem nullák, így a mátrix sem a nullmátrix, tehát a sorozat valamennyi eleme nullától különböző, a sorozatban a nem 0 tagok száma nem véges, ezért ez nem polinomot definiál.

1.r. $f_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ n_1 e & 0 & 0 \\ 0 & n_2 e & 0 \end{pmatrix}$, és némi számolással azt kapjuk, hogy

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & n_2 e & 0 \\ 0 & 0 & n_1 e \\ n_1 n_2 e & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$f_2 = n_1 n_2 \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

és $f_{3k+l} = (n_1 n_2)^k f_l$, ahol $k \in \mathbf{N}_0$ és $l \in \{0, 1, 2\}$. Ha valamilyen pozitív egész m-re $me = 0$, és n a legkisebb ilyen tulajdonságú egész szám, továbbá $n_1 n_2$ osztható az n valamennyi prímtényezőjével, akkor elegendően nagy k esetén $(n_1 n_2)^k$ osztható n-nel, és akkor $n_1 n_2$ minden k-nál nagyobb kitevős hatványa is osztható n-nel, tehát innen kezdve a sorozat minden tagja biztosan 0, a sorozat polinomot határoz meg. Ha a legkisebb ilyen kitevő k', akkor a polinom foka $k' - 1$ háromszorosa, vagy ennél kettővel nagyobb. Amennyiben viszont pozitív egész m-mel me soha nem nulla, vagy n-nek van olyan prímtényezője, amely nem osztója $n_1 n_2$-nek, akkor $(n_1 n_2)^k$ semmilyen pozitív egész k esetén nem osztható n-nel, és így a mátrix semmilyen i index esetén nem lesz a nullmátrix, a sorozatban a nem 0 tagok száma nem véges, ezért ez nem polinomot definiál.

1.s.

$$\begin{aligned} f_0 &= \mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \\ f_1 &= \mathbf{A}^1 = \mathbf{A} \\ f_2 &= \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_1 n_2 e \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f_3 &= \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ f_{3+i} &= \mathbf{A}^3 \mathbf{A}^i = \mathbf{0} \cdot \mathbf{A}^i = \mathbf{0} \end{aligned}$$

így a sorozat polinomot definiál, és a polinom foka legfeljebb 2. Amennyiben e rendje a gyűrű additív csoportjában véges, akkor ha n_1, n_2 és n_3 mindegyike osztható ezzel a renddel, akkor a polinom nulladfokú, azaz egy nem nulla konstans polinom, $f = \mathbf{I}$ ellenkező esetben ha $n_1 n_2$ az előbbi rend többszöröse, akkor a polinom elsőfokú, tehát lineáris, $f = \begin{pmatrix} 0 & n_1 e & n_3 e \\ 0 & 0 & n_2 e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \mathbf{I}$ egyébként a polinom pontosan másodfokú.

Ebben az esetben $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_1 n_2 e \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & n_1 e & n_3 e \\ 0 & 0 & n_2 e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \mathbf{I}$.

4.1.2. Polinom alakja, konstans polinom, lineáris polinom

2. A polinomban a nulla-együtthatós tagot nem írjuk ki, kivéve a nullpolinomot, a konstans tagnál nem írjuk ki az x^0-t, az egységelemet mint együtthatót csak a konstans tagban írjuk ki, és x^1-ben nem írjuk ki a kitevőt.

2.a. $f = 2$

2.b. $f = x^4 + 3x^2 + x + 2$

2.c. $f = x^4 + x + 2$

2.d. $f = x^4 + x$

2.e. $f = 0$

2.f. $f = 6x^4 + 3x^2 + 3x$

3. Egy polinom akkor és csak akkor konstans, ha legfeljebb a 0-indexű tagjának együtthatója nem 0, és pontosan akkor lineáris, ha az 1-nél nagyobb indexekre valamennyi együtthatója 0 (tehát egy konstans polinom egyben lineáris is, de visszafelé általában ez nem igaz).

3.a. $f = x^4 + 3x^2 + x + 2$, például a negyedfokú tag együtthatója nem 0, a polinom nem lineáris, és így nem is konstans.

3.b. $f = x^4 + x^2 + x$, például a negyedfokú tag együtthatója nem 0, a polinom nem lineáris, és így nem is konstans.

3.c. $f = 2$, tehát a polinom konstans polinom, és így lineáris is.

3.d. $f = 2x^2$, a másodfokú tag együtthatója nem 0, a polinom nem lineáris, és így nem is konstans.

3.e. $f = 3x^4 + 4x^3 + 10x + 5$, például a negyedfokú tag együtthatója nem 0, a polinom nem lineáris, és így nem is konstans.

3.f. $e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$ és $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, így $f = 2\pi x + \frac{5}{2}$, f lineáris, de nem konstans polinom.

4.1.3. Műveletek polinomokkal

4. Összeadásnál és kivonásnál a kisebb fokszámú polinomot megfelelő számú nulla-együtthatós taggal kiegészítve, és figyelembe véve a ki nem írt tagokat is, az azonos kitevőhöz tartozó együtthatók összege illetve különbsége lesz az eredménypolinom megfelelő tagjának együtthatója:

$$\sum_{i=0}^{n_f} a_i x^i \pm \sum_{i=0}^{n_g} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\max\{n_f, n_g\}} (a_i \pm b_i)\, x^i$$

Konstanssal való szorzásnál egyszerűen megszorozzuk a polinom valamennyi együtthatóját a konstanssal:

$$c\sum_{i=0}^{n_f} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n_f} (ca_i)\, x^i$$

A polinomok szorzásánál kihasználjuk, hogy a polinom az egyes kitevőhöz tartozó tagjainak mint egytagú polinomoknak az összege, a polinomok összeadása kommutatív és asszociatív, és a szorzás disztributív az összeadásra nézve, így külön-külön szorozhatjuk az egyik polinom valamennyi tagját a másik polinom mindenegyes tagjával, és utána az azonos kitevőhöz tartozó tagokat összevonhatjuk. Ez ugyanazt az eredményt adja, mint amit a szorzás definíciójával kapunk:

$$\sum_{i=0}^{n_f} a_i x^i \sum_{i=0}^{n_g} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n_f}\sum_{j=0}^{n_g} (a_i b_j)\, x^{i+j} = \sum_{i=0}^{n_f+n_g}\left(\sum_{j=0}^{i} (a_j b_{i-j})\right) x^i$$

Az alábbiakban a felesleges nullákat nem írjuk ki.

4.a.

$$\begin{aligned} f+g &= \left(3x^3+2x+4\right)+\left(2x^4+2x^2+5x\right) \\ &= 2x^4+3x^3+2x^2+(2+5)\,x+4 = 2x^4+3x^3+2x^2+7x+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f-g &= \left(3x^3+2x+4\right)-\left(2x^4+2x^2+5x\right) \\ &= (-2)\,x^4+3x^3+(-2)\,x^2+(2-5)\,x+4 = -2x^4+3x^3-2x^2-3x+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cf &= (-3)\left(3x^3+2x+4\right) = \\ &= ((-3)\cdot 3)\,x^3+((-3)\cdot 2)\,x+((-3)\cdot 4) = -9x^3-6x-12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} fg &= \left(3x^3+2x+4\right)\left(2x^4+2x^2+5x\right) \\ &= \left(3x^3\cdot 2x^4\right)+\left(3x^3\cdot 2x^2\right)+\left(3x^3\cdot 5x\right)+\left(2x\cdot 2x^4\right) \\ &+\left(2x\cdot 2x^2\right)+(2x\cdot 5x)+\left(4\cdot 2x^4\right)+\left(4\cdot 2x^2\right)+(4\cdot 5x) \\ &= 6x^7+6x^5+15x^4+4x^5+4x^3+10x^2+8x^4+8x^2+20x \\ &= 6x^7+10x^5+23x^4+4x^3+18x^2+20x. \end{aligned}$$

A szorzás definícióját alkalmazva

$$\begin{aligned} fg &= \left(3x^3+2x+4\right)\left(2x^4+2x^2+5x\right) \\ &= (4\cdot 5)\,x+(2\cdot 5+4\cdot 2)\,x^2+(2\cdot 2)\,x^3+(3\cdot 5+4\cdot 2)\,x^4 \\ &+(3\cdot 2+2\cdot 2)\,x^5+(3\cdot 2)\,x^7 \\ &= 6x^7+10x^5+23x^4+4x^3+18x^2+20x \end{aligned}$$

a szorzás két kiszámítása azonos eredményt ad.

$$\begin{aligned} gf &= \left(2x^4+2x^2+5x\right)\left(3x^3+2x+4\right) \\ &= (5\cdot 4)\,x + (2\cdot 4+5\cdot 2)\,x^2 + (2\cdot 2)\,x^3 + (2\cdot 4+5\cdot 3)\,x^4 \\ &+ (2\cdot 2+2\cdot 3)\,x^5 + (2\cdot 3)\,x^7 \\ &= 6x^7+10x^5+23x^4+4x^3+18x^2+20x \end{aligned}$$

Látható, hogy $fg = gf$, ami következik abból, hogy $\mathbf{Z}$ kommutatív gyűrű.

4.b.

$$\begin{aligned} f+g &= \left(3x^3+2x+4\right)+\left(2x^4+2x^2+5x\right) \\ &= \left(3x^3+2x+4\right)+\left(2x^4+2x^2\right) = 2x^4+3x^3+2x^2+2x+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f-g &= \left(3x^3+2x+4\right)-\left(2x^4+2x^2+5x\right) \\ &= \left(3x^3+2x+4\right)-\left(2x^4+2x^2\right) = (-2)\,x^4+3x^3+(-2)\,x^2+2x+4 \\ &= 3x^4+3x^3+3x^2+2x+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cf &= (-3)\left(3x^3+2x+4\right) = \\ &= (2\cdot 3)\,x^3+(2\cdot 2)\,x+(2\cdot 4) = x^3+4x+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} fg &= \left(3x^3+2x+4\right)\left(2x^4+2x^2+5x\right) \\ &= \left(3x^3+2x+4\right)\left(2x^4+2x^2\right) \\ &= \left(3x^3\cdot 2x^4\right)+\left(3x^3\cdot 2x^2\right)+\left(2x\cdot 2x^4\right) \\ &+ \left(2x\cdot 2x^2\right)+\left(4\cdot 2x^4\right)+\left(4\cdot 2x^2\right) \\ &= x^7+x^5+4x^5+4x^3+3x^4+3x^2 \\ &= x^7+3x^4+4x^3+3x^2 \end{aligned}$$

A szorzás definícióját alkalmazva

$$\begin{aligned} fg &= \left(3x^3+2x+4\right)\left(2x^4+2x^2+5x\right) \\ &= \left(3x^3+2x+4\right)\left(2x^4+2x^2\right) \\ &= (4\cdot 2)\,x^2+(2\cdot 2)\,x^3+(4\cdot 2)\,x^4 \\ &+ (3\cdot 2+2\cdot 2)\,x^5+(3\cdot 2)\,x^7 \\ &= 6x^7+10x^5+23x^4+4x^3+18x^2 \\ &= x^7+3x^4+4x^3+3x^2 \end{aligned}$$

a szorzás két kiszámítása azonos eredményt ad.

Mivel $\mathbf{Z}_5$ kommutatív gyűrű, ezért $gf = fg$.

4.c.

$$\begin{aligned} f+g &= \left(-4x^4+2x^2+11x\right)+\left(-12x^5+3x^3+2x-8\right) \\ &= \left(2x^4+2x^2+5x\right)+\left(3x^3+2x+4\right) \\ &= 2x^4+3x^3+2x^2+(2+5)\,x+4 \\ &= 2x^4+3x^3+2x^2+7x+4 \\ &= 2x^4+3x^3+2x^2+x+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f-g &= \left(-4x^4+2x^2+11x\right)-\left(-12x^5+3x^3+2x-8\right) \\ &= \left(2x^4+2x^2+5x\right)-\left(3x^3+2x+4\right) \\ &= 2x^4-3x^3+2x^2+(5-2)\,x-4 \\ &= 2x^4-3x^3+2x^2+3x-4 \\ &= 2x^4+3x^3+2x^2+3x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cf &= (-3)\left(-4x^4+2x^2+11x\right) \\ &= 3\left(2x^4+2x^2+5x\right)=(3\cdot 2)\,x^4+(3\cdot 2)\,x^2+(3\cdot 5)\,x \\ &= 6x^4+6x^2+15x=3x \end{aligned}$$

Megjegyzés: A fenti példában egy negyedfokú polinomot egy nem nulla konstanssal szorozva az eredmény egy elsőfokú, tehát az eredetinél alacsonyabbfokú polinom. Ennek az az oka, hogy $\mathbf{Z}_6$ nem nullosztómentes, és -3 nullosztó ebben a gyűrűben, amelynek a 2 nullosztópárja.

$$\begin{aligned} fg &= \left(-4x^4+2x^2+11x\right)\left(-12x^5+3x^3+2x-8\right) \\ &= \left(2x^4+2x^2+5x\right)\left(3x^3+2x+4\right) \\ &= \left(2x^4\cdot 3x^3\right)+\left(2x^4\cdot 2x\right)+\left(2x^4\cdot 4\right) \\ &+ \left(2x^2\cdot 3x^3\right)+\left(2x^2\cdot 2x\right)+\left(2x^2\cdot 4\right) \\ &+ \left(5x\cdot 3x^3\right)+(5x\cdot 2x)+(5x\cdot 4) \\ &= 6x^7+4x^5+8x^4+6x^5+4x^3+8x^2 \\ &+ 15x^4+10x^2+20x \\ &= 4x^5+5x^4+4x^3+2x \end{aligned}$$

Megjegyzés: Most egy negyedfokú és egy harmadfokú polinom szorzata nem hetedfokú, hanem csupán ötödfokú, ismét azért, mert az alapgyűrű nem nullosztómentes, és a két főegyüttható nullosztópárt alkot.

Mivel $\mathbf{Z}_6$ kommutatív, ezért $gf = fg$. Ellenőrzésképpen gf-et a szorzás definícióját alkalmazva határozzuk meg:

$$\begin{aligned}
gf &= \left(-12x^5 + 3x^3 + 2x - 8\right)\left(-4x^4 + 2x^2 + 11x\right) \\
&= \left(3x^3 + 2x + 4\right)\left(2x^4 + 2x^2 + 5x\right) \\
&= (4 \cdot 5)\,x + (2 \cdot 5 + 4 \cdot 2)\,x^2 + (2 \cdot 2)\,x^3 + (3 \cdot 5 + 4 \cdot 2)\,x^4 \\
&+ (3 \cdot 2 + 2 \cdot 2)\,x^5 + (3 \cdot 2)\,x^7 \\
&= 6x^7 + 10x^5 + 23x^4 + 4x^3 + 18x^2 + 20x \\
&= 4x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 2x
\end{aligned}$$

4.d.

$$\begin{aligned}
f + g &= \left((4+2i)\,x^3 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x^2 + 2x + \sqrt[3]{3}\right) \\
&+ \left(-ex^5 - (1+i)\,x^3 + 2x^2 + \frac{5}{2}x - \sqrt{11}\right) \\
&= (-e)\,x^5 + ((4+2i) - (1+i))\,x^3 \\
&+ \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 2\right)x^2 + \left(2 + \frac{5}{2}\right)x + \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt{11}\right) \\
&= -ex^5 + (3+i)\,x^3 + \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x^2 + \frac{9}{2}x + \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt{11}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f - g &= \left((4+2i)\,x^3 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x^2 + 2x + \sqrt[3]{3}\right) \\
&- \left(-ex^5 - (1+i)\,x^3 + 2x^2 + \frac{5}{2}x - \sqrt{11}\right) \\
&= ex^5 + ((4+2i) + (1+i))\,x^3 \\
&+ \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 2\right)x^2 + \left(2 - \frac{5}{2}\right)x + \left(\sqrt[3]{3} + \sqrt{11}\right) \\
&= ex^5 + (5+3i)\,x^3 - \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\sqrt[3]{3} + \sqrt{11}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cf &= \left(-\frac{\pi}{2}\right)\left((4+2i)\,x^3 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x^2 + 2x + \sqrt[3]{3}\right) \\
&= -(2+i)\,\pi x^3 - \left(1 - \sqrt{3}i\right)\frac{\pi}{4}x^2 - \pi x - \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\pi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
fg &= \left((4+2i)\,x^3 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) x^2 + 2x + \sqrt[3]{3} \right) \\
&\quad \times \left(-e x^5 - (1+i)\,x^3 + 2x^2 + \frac{5}{2} x - \sqrt{11} \right) \\
&= \left((4+2i)\,x^3 \cdot \left(-e x^5\right) \right) + \left((4+2i)\,x^3 \cdot \left(-(1+i)\,x^3 \right) \right) \\
&\quad + \left((4+2i)\,x^3 \cdot 2x^2 \right) + \left((4+2i)\,x^3 \cdot \frac{5}{2} x \right) + \left((4+2i)\,x^3 \cdot \left(-\sqrt{11} \right) \right) \\
&\quad + \left(-\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) x^2 \cdot \left(-e x^5\right) \right) \\
&\quad + \left(-\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) x^2 \cdot \left(-(1+i)\,x^3 \right) \right) + \left(-\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) x^2 \cdot 2x^2 \right) \\
&\quad + \left(-\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) x^2 \cdot \frac{5}{2} x \right) + \left(-\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) x^2 \cdot \left(-\sqrt{11} \right) \right) \\
&\quad + \left(2x \cdot \left(-e x^5\right) \right) + \left(2x \cdot \left(-(1+i)\,x^3 \right) \right) \\
&\quad + \left(2x \cdot 2x^2 \right) + \left(2x \cdot \frac{5}{2} x \right) + \left(2x \cdot \left(-\sqrt{11} \right) \right) \\
&\quad + \left(\sqrt[3]{3} \cdot \left(-e x^5\right) \right) + \left(\sqrt[3]{3} \cdot \left(-(1+i)\,x^3 \right) \right) + \left(\sqrt[3]{3} \cdot 2x^2 \right) \\
&\quad + \left(\sqrt[3]{3} \cdot \frac{5}{2} x \right) + \left(\sqrt[3]{3} \cdot \left(-\sqrt{11} \right) \right) \\
&= -e\,(4+2i)\,x^8 + (-2-6i)\,x^6 + (8+4i)\,x^5 \\
&\quad + (10+5i)\,x^4 - \sqrt{11}\,(4+2i)\,x^3 + e \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) x^7 \\
&\quad + \left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i \right) x^5 + \left(1 - \sqrt{3} i \right) x^4 \\
&\quad + \left(\frac{5}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{2} i \right) x^3 + \left(-\frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} i \right) x^2 \\
&\quad - 2e x^6 - (2+2i)\,x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2\sqrt{11} x - e \sqrt[3]{3} x^5 \\
&\quad - \sqrt[3]{3}\,(1+i)\,x^3 + 2\sqrt[3]{3} x^2 + \frac{5\sqrt[3]{3}}{2} x - \sqrt{11}\sqrt[3]{3} \\
&= -2e\,(2+i)\,x^8 + e \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) x^7 - 2\left((1+e) + 3i \right) x^6 \\
&\quad + \left(\left(\frac{15}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - e\sqrt[3]{3} \right) + \left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i \right) x^5 + \left(9 + \left(3 - \sqrt{3} \right) i \right) x^4 \\
&\quad + \left(\left(\frac{21}{4} - 4\sqrt{11} - \sqrt[3]{3} \right) - \left(2\sqrt{11} + \frac{5\sqrt{3}}{2} + \sqrt[3]{3} \right) i \right) x^3 \\
&\quad + \left(\left(5 - \frac{\sqrt{11}}{2} + 2\sqrt[3]{3} \right) + \frac{\sqrt{33}}{2} i \right) x^2 + \left(-2\sqrt{11} + \frac{5\sqrt[3]{3}}{2} \right) x - \sqrt{11}\sqrt[3]{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
fg &= \left((4+2i)\,x^3 - \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x^2 + 2x + \sqrt[3]{3} \right) \\
&\times \left(-ex^5 - (1+i)\,x^3 + 2x^2 + \frac{5}{2}x - \sqrt{11} \right) \\
&= \left(\sqrt[3]{3} \cdot \left(-\sqrt{11}\right) \right) + \left(2 \cdot \left(-\sqrt{11}\right) + \sqrt[3]{3} \cdot \frac{5}{2} \right) x \\
&+ \left(-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(-\sqrt{11}\right) + 2 \cdot \frac{5}{2} + \sqrt[3]{3} \cdot 2 \right) x^2 \\
&+ \left((4+2i) \cdot \left(-\sqrt{11}\right) + \left(-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \frac{5}{2} \right) + 2 \cdot 2 + \sqrt[3]{3} \cdot (-(1+i)) \right) x^3 \\
&+ \left((4+2i) \cdot \frac{5}{2} + \left(-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot 2 \right) + 2 \cdot (-(1+i)) \right) x^4 \\
&+ \left((4+2i) \cdot 2 + \left(-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot (-(1+i)) \right) + \sqrt[3]{3} \cdot (-e) \right) x^5 \\
&+ \left((4+2i) \cdot (-(1+i)) + 2 \cdot (-e) \right) x^6 \\
&+ \left(-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot (-e) \right) x^7 + \left((4+2i) \cdot (-e) \right) x^8 \\
&= -2e\,(2+i)\,x^8 - e\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x^7 - 2\left((1+e)+3i\right)x^6 \\
&+ \left(\left(\frac{15}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - e\sqrt[3]{3} \right) + \left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i \right) x^5 \\
&+ \left(9 + \left(3-\sqrt{3}\right) i \right) x^4 + \begin{pmatrix} \left(\frac{21}{4} - 4\sqrt{11} - \sqrt[3]{3}\right) \\ -\left(2\sqrt{11} + \frac{5\sqrt{3}}{4} + \sqrt[3]{3}\right) i \end{pmatrix} x^3 \\
&+ \left(\left(5 - \frac{\sqrt{11}}{2} + 2\sqrt[3]{3} \right) + \frac{\sqrt{33}}{2} i \right) x^2 + \left(-2\sqrt{11} + \frac{5\sqrt[3]{3}}{2} \right) x - \sqrt{11}\sqrt[3]{3}
\end{aligned}
$$

Mivel $\mathbf{C}$ kommutatív gyűrű, ezért $gf = fg$.

4.e.

$$
\begin{aligned}
f+g &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x + \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
f-g &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right) - \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}x^2 - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}x + \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}x^2 - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cf &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
fg &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}x \\
&+ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}x^3 \\
&= \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}x^3 + \begin{pmatrix} -10 & 11 \\ -11 & -10 \end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -7 & -11 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
gf &= \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}x \\
&+ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}x^3 \\
&= \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}x^3 + \begin{pmatrix} -10 & 11 \\ -11 & -10 \end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -7 & -11 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Megjegyzés: Jóllehet $\mathbf{Z}^{(2)}$ nem kommutatív (a mátrixok szorzása általában semmilyen gyűrű fölötti mátrixok esetén nem kommutatív), most mégis azonos eredményt kaptunk a tényezők különböző sorrendje esetén. Ennek oka, hogy a megadott mátrixok speciálisak: a főátlóban álló két elem azonos, míg a mellékátlóban álló két elem egymás ellentettje. Könnyű belátni, hogy az ilyen mátrixok halmaza zárt a kivonásra és a szorzásra, és nem üres, tehát részgyűrűt alkotnak, és azt sem nehéz belátni, hogy ez a gyűrű izomorf a komplex számok testével, amely kommutatív.

4.f.

$$\begin{aligned}
f+g &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 14 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f-g &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right) - \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\right) x^2 - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\right) x^2 - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cf &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 14 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 16 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
fg &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x \\
&+ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x^3 \\
&= \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 26 & 11 \\ 22 & 26 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} -16 & 3 \\ 6 & -16 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 25 & 7 \\ 14 & 25 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
gf &= \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} x \\
&+ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^3 \\
&= \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 26 & 11 \\ 22 & 26 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} -16 & 3 \\ 6 & -16 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 25 & 7 \\ 14 & 25 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Megjegyzés: Most megint teljesül az $fg = gf$ egyenlőség. Ismét az a helyzet, hogy az együttható-mátrixok speciálisak: a főátlóban álló elemek megegyeznek, és a mellékátlóban a nagyobb sorindexű elem kétszerese a másik elemnek. Ezek a mátrixok részgyűrűt alkotnak, és az $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \longmapsto a + b\sqrt{2}$ szabály ezt a részgyűrűt műveletartó (és injektív) módon képezi le a valós számok testébe, amely kommutatív. Az előző és a mostani feladat általánosítása az $\begin{pmatrix} a & b \\ mb & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok esete (az előbbinél $m = -1$), ahol m egy 0-tól és 1-től különböző olyan egész szám, amely nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Most a megfelelő leképezés $\begin{pmatrix} a & b \\ mb & a \end{pmatrix} \longmapsto a + b\sqrt{m}$.

4.g.

$$
\begin{aligned}
f+g &= \left(\begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1-3i & -3+i \\ 3+i & 1+3i \end{pmatrix}\right) \\
&+ \left(\begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4+i & 4-2i \\ -4-2i & 4-i \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} x \\
&+ \left(\begin{pmatrix} 1-3i & -3+i \\ 3+i & 1+3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4+i & 4-2i \\ -4-2i & 4-i \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} x \\
&+ \begin{pmatrix} 5-2i & 1-i \\ -1-i & 5+2i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f-g &= \left(\begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1-3i & -3+i \\ 3+i & 1+3i \end{pmatrix}\right) \\
&- \left(\begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4+i & 4-2i \\ -4-2i & 4-i \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} x \\
&+ \left(\begin{pmatrix} 1-3i & -3+i \\ 3+i & 1+3i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+i & 4-2i \\ -4-2i & 4-i \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} x \\
&+ \begin{pmatrix} -3-4i & -7+3i \\ 7+3i & -3+4i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$cf = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ -i & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1-3i & -3+i \\ 3+i & 1+3i \end{pmatrix} \right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1+9i & 7-7i \\ -7-7i & 1-9i \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 4-12i & -6+2i \\ 6+2i & 4+12i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
fg = {} & \left(\begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1-3i & -3+i \\ 3+i & 1+3i \end{pmatrix} \right) \\
\times & \left(\begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4+i & 4-2i \\ -4-2i & 4-i \end{pmatrix} \right) \\
= {} & \begin{pmatrix} 1-3i & -3+i \\ 3+i & 1+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+i & 4-2i \\ -4-2i & 4-i \end{pmatrix} \\
+ {} & \begin{pmatrix} 1-3i & -3+i \\ 3+i & 1+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} x \\
+ {} & \begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+i & 4-2i \\ -4-2i & 4-i \end{pmatrix} x^2 \\
+ {} & \begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} x^3 \\
= {} & \begin{pmatrix} 17-i & 5-3i \\ -5-3i & 17+i \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -14+11i & 18-5i \\ -18-5i & -14-11i \end{pmatrix} x^2 \\
+ {} & \begin{pmatrix} -14-8i & -8+6i \\ 8+6i & -14+8i \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 21-9i & -13-7i \\ 13-7i & 21+9i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
gf = {} & \left(\begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4+i & 4-2i \\ -4-2i & 4-i \end{pmatrix} \right) \\
\times & \left(\begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1-3i & -3+i \\ 3+i & 1+3i \end{pmatrix} \right) \\
= {} & \begin{pmatrix} 4+i & 4-2i \\ -4-2i & 4-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-3i & -3+i \\ 3+i & 1+3i \end{pmatrix} \\
+ {} & \begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-3i & -3+i \\ 3+i & 1+3i \end{pmatrix} x \\
+ {} & \begin{pmatrix} 4+i & 4-2i \\ -4-2i & 4-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} x^2 \\
+ {} & \begin{pmatrix} 2-2i & -3+i \\ 3+i & 2+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i & 3-2i \\ -3-2i & 1-2i \end{pmatrix} x^3 \\
= {} & \begin{pmatrix} 17+5i & 1-3i \\ -1-3i & 17-5i \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -14+7i & 14-15i \\ -14-15i & -14-7i \end{pmatrix} x^2 \\
+ {} & \begin{pmatrix} -14-8i & -10 \\ 10 & -14+8i \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 21-13i & -3+11i \\ 3+11i & 21+13i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Megjegyzés: Most a két szorzat különböző, bár a mátrixok most is speciálisak: a főátlóban álló két elem egymás konjugáltja, míg a mellékátlóban az egyik elem a másik konjugáltjának ellentettje. Ezek a mátrixok részgyűrűt alkotnak a 2×2-es komplex mátrixok gyűrűjében, és a $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \longmapsto a+bi+cj+dk$ szabály a részgyűrűt izomorf módon képezi le a kvaterniók ferdetestébe, amely nem kommutatív.

4.h.

$$
\begin{aligned}
f+g &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&+ \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} x \\
&+ \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} x \\
&+ \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f-g &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&- \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} x \\
&+ \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} x \\
&+ \begin{pmatrix} -3 & -4 & -7 & 3 \\ 4 & -3 & -3 & -7 \\ 7 & 3 & -3 & 4 \\ -3 & 7 & -4 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
cf &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 & -7 \\ -9 & 1 & 7 & 7 \\ -7 & -7 & 1 & -9 \\ 7 & -7 & 9 & 1 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 4 & -12 & -6 & 2 \\ 12 & 4 & -2 & -6 \\ 6 & 2 & 4 & 12 \\ -2 & 6 & -12 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$fg = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\times \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} x$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} x^2$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} x^3$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & 17 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & 17 & 1 \\ 3 & -5 & -1 & 17 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -14 & 11 & 18 & -5 \\ -11 & -14 & 5 & 18 \\ -18 & -5 & -14 & -11 \\ 5 & -18 & 11 & -14 \end{pmatrix} x^2$$

$$+ \begin{pmatrix} -14 & -8 & -8 & 6 \\ 8 & -14 & -6 & -8 \\ 8 & 6 & -14 & 8 \\ -6 & 8 & -8 & -14 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 21 & -9 & -13 & -7 \\ 9 & 21 & 7 & -13 \\ 13 & -7 & 21 & 9 \\ 7 & 13 & -9 & 21 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
gf = & \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right) \\
\times & \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
= & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
+ & \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} x \\
+ & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 \\
+ & \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x^3 \\
= & \begin{pmatrix} 17 & 5 & 1 & -3 \\ -5 & 17 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 17 & -5 \\ 3 & -1 & 5 & 17 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -14 & 7 & 14 & -15 \\ -7 & -14 & 15 & 14 \\ -14 & -15 & -14 & -7 \\ 15 & -14 & 7 & -14 \end{pmatrix} x^2 \\
+ & \begin{pmatrix} -14 & -8 & -10 & 0 \\ 8 & -14 & 0 & -10 \\ 10 & 0 & -14 & 8 \\ 0 & 10 & -8 & -14 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 21 & -13 & -3 & 11 \\ 13 & 21 & -11 & -3 \\ 3 & 11 & 21 & 13 \\ -11 & 3 & -13 & 21 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Megjegyzés: A két szorzat ismét különböző. Ez a feladat lényegében véve azonos az előzővel: az együttható-mátrixok $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ alakúak, ahol az egyes elemek valós (speciálisan egész) számok, és az

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}
$$

szabály izomorfizmus a két részhalmaz között. Mivel az utóbbi izomorf a kvaterniók ferdetestével (ha a, b, c és d tetszőleges valós számok, míg ha mindegyikük egész szám, akkor a kvaterniók ferdetestének egy részgyűrűjével), ezért az ilyen mátrixok gyűrűje sem kommutatív.

4.i.

$$\begin{aligned}
f+g &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x + \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f-g &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right) - \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) - \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) x^2 - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x + \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) x^2 + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cf &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
fg &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x \\
&+ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x^3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
gf &= \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x \\
&+ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Megjegyzés: A mátrixok speciális alakja miatt a két sorrendben elvégzett szorzás eredménye azonos.

4.j.

$$\begin{aligned}
f+g &= \left(48x^2+12x-12\right)+\left(30x^2-6x+12\right) \\
&= \left(48x^2+12x+60\right)+\left(30x^2+66x+12\right) \\
&= (48+30)\,x^2+(12+66)\,x+(60+12) \\
&= 78x^2+78x+72 = 6x^2+6x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f-g &= \left(48x^2+12x-12\right)-\left(30x^2-6x+12\right) \\
&= \left(48x^2+12x+60\right)-\left(30x^2+66x+12\right) \\
&= (48-30)\,x^2+(12-66)\,x+(60-12) \\
&= 18x^2-54x+48 = 18x^2+18x+48
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cf &= (-15)\left(48x^2+12x-12\right)\\
&= 57\left(48x^2+12x+60\right) =\\
&= (57\cdot 48)\,x^2+(57\cdot 12)\,x+(57\cdot 60)\\
&= 2736x^2+684x+3420 = 36x+36
\end{aligned}$$

Megjegyzés: A szorzatpolinom az eredetinél alacsonyabbfokú. Ennek az az oka, hogy $\mathbf{Z}_{72}$ nem nullosztómentes, és -15, 48 nullosztópár ebben a gyűrűben.

$$\begin{aligned}
fg &= \left(48x^2+12x-12\right)\left(30x^2-6x+12\right)\\
&= \left(48x^2+12x+60\right)\left(30x^2+66x+12\right)\\
&= \left(48x^2\cdot 30x^2\right)+\left(48x^2\cdot 66x\right)+\left(48x^2\cdot 12\right)\\
&+\left(12x\cdot 30x^2\right)+(12x\cdot 66x)+(12x\cdot 12)\\
&+\left(60\cdot 30x^2\right)+(60\cdot 66x)+(60\cdot 12)\\
&= 1440x^4+3168x^3+576x^2+360x^3+792x^2\\
&+144x+1800x^2+3960x+720\\
&= 1440x^4+3528x^3+3168x^2+4104x+720 = 0
\end{aligned}$$

Megjegyzés: Most két nem nulla polinom szorzata a nullpolinom, igazolva, hogy nem nullosztómentes gyűrű feletti polinomgyűrű sem nullosztómentes.

Mivel $\mathbf{Z}_{72}$ kommutatív, ezért $gf = fg$. Ellenőrzésképpen gf-et a szorzás definícióját alkalmazva határozzuk meg:

$$\begin{aligned}
gf &= \left(48x^2+12x-12\right)\left(30x^2-6x+12\right)\\
&= \left(48x^2+12x+60\right)\left(30x^2+66x+12\right)\\
&= (60\cdot 12)+(12\cdot 12+60\cdot 66)\,x\\
&+ (48\cdot 12+12\cdot 66+60\cdot 30)\,x^2\\
&+ (48\cdot 66+12\cdot 30)\,x^3+(48\cdot 30)\,x^4\\
&= 1440x^4+3528x^3+3168x^2+4104x+720 = 0
\end{aligned}$$

4.k.

$$\begin{aligned}
f+g &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1,5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1,5 \end{pmatrix}\right) \\
&+ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1,2 & 2 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\right) x \\
&+ \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,2 & 2 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{13}{6} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 & 30 \\ -8 & -13 \end{pmatrix} x + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 5 & -20 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{30}\left(\begin{pmatrix} 90 & 150 \\ -40 & -65 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 54 & 120 \\ 30 & -120 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f-g &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1,5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1,5 \end{pmatrix}\right) \\
&- \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1,2 & 2 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\right) x \\
&+ \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1,2 & 2 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{21}{5} & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} x + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 35 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{30}\left(\begin{pmatrix} 30 & 30 \\ -20 & -25 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 126 & 0 \\ 210 & 30 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
fg &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1,5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1,5 \end{pmatrix}\right) \\
&\times \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1,2 & 2 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,2 & 2 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix}\right) \\
&\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,2 & 2 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\right) x \\
&+ \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\right) x^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} -\frac{136}{15} & \frac{7}{6} \\ \frac{51}{5} & \frac{43}{4} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\frac{48}{5} & 1 \\ -\frac{3}{10} & \frac{47}{4} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{60} \left(\begin{pmatrix} 60 & 120 \\ -30 & -60 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} -544 & 70 \\ 612 & 645 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -576 & 60 \\ -18 & 705 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
gf &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1,2 & 2 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix}\right) \\
&\times \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1,5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1,5 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} -1,2 & 2 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1,5 \end{pmatrix}\right) \\
&\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,2 & 2 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1,5 \end{pmatrix}\right) x \\
&+ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1,5 \end{pmatrix}\right) x^2 \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{33}{5} & -\frac{38}{5} \\ -\frac{43}{6} & -\frac{59}{12} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{22}{5} & -\frac{27}{5} \\ -19 & -\frac{9}{4} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{60} \left(\begin{pmatrix} -396 & -456 \\ -430 & -295 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 264 & -324 \\ -1140 & -135 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

és $fg \neq gf$, sőt, a két szorzat foka is különböző.

4.1.

$$
\begin{aligned}
f + g &= \sum_{j=0}^{n} e^j x^j + \sum_{j=0}^{n} e^{-j} x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(e^j + e^{-j}\right) x^j = 2 \sum_{j=0}^{n} (\cosh j)\, x^j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f - g &= \sum_{j=0}^{n} e^{j} x^{j} - \sum_{j=0}^{n} e^{-j} x^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(e^{j} - e^{-j}\right) x^{j} = 2 \sum_{j=0}^{n} (\sinh j)\, x^{j}
\end{aligned}
$$

$$
cf = n \sum_{j=0}^{n} e^{j} x^{j} = \sum_{j=0}^{n} \left(n e^{j}\right) x^{j}
$$

$$
\begin{aligned}
fg &= \sum_{j=0}^{n} e^{j} x^{j} \cdot \sum_{j=0}^{n} e^{-j} x^{j} = \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=0}^{j} \left(e^{k} e^{-(j-k)}\right) x^{j} \\
&= \frac{1}{\sinh 1} \sum_{j=0}^{2n} \sinh (j+1)\, x^{j}
\end{aligned}
$$

és $gf = fg$.

4.m.

$$
\begin{aligned}
f + g &= \sum_{j=0}^{n} e^{ij} x^{j} + \sum_{j=0}^{n} e^{-ij} x^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(e^{ij} + e^{-ij}\right) x^{j} = 2 \sum_{j=0}^{n} (\cos j)\, x^{j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f - g &= \sum_{j=0}^{n} e^{ij} x^{j} - \sum_{j=0}^{n} e^{-ij} x^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(e^{ij} - e^{-ij}\right) x^{j} = 2i \sum_{j=0}^{n} (\sin j)\, x^{j}
\end{aligned}
$$

$$
cf = n \sum_{j=0}^{n} e^{ij} x^{j} = \sum_{j=0}^{n} \left(n e i^{j}\right) x^{j}
$$

$$
\begin{aligned}
fg &= \sum_{j=0}^{n} e^{ij} x^{j} \cdot \sum_{j=0}^{n} e^{-ij} x^{j} = \sum_{j=0}^{2n} \sum_{k=0}^{j} \left(e^{ik} e^{-i(j-k)}\right) x^{j} \\
&= \frac{1}{\sin 1} \sum_{j=0}^{2n} \sin (j+1)\, x^{j}
\end{aligned}
$$

és $gf = fg$.

4.1.4. Polinom foka, főegyütthatója

5. Jelöljük az f polinom együtthatóit a_i-vel és g együtthatóit b_i-vel. Ha bevezetjük a $\delta(f) = \begin{cases} \deg f & f \neq 0 \\ -\infty & f = 0 \end{cases}$ jelölést, akkor

$$\delta(f \pm g) \leq \max\{\delta(f), \delta(g)\}$$
$$\delta(fg) \leq \delta(f) + \delta(g)$$

és $\delta(f \pm g) = \max\{\delta(f), \delta(g)\}$, ha $\delta(f) \neq \delta(g)$ vagy $a_{\delta(f)} \neq \mp b_{\delta(g)}$, valamint $\delta(fg) = \delta(f) + \delta(g)$, ha R nullosztómentes, vagy ha $a_{\delta(f)}$ és $b_{\delta(g)}$ nem nullosztópár. Ha δ'-vel jelöljük a legkisebb fokszámú nem nulla együtthatós tag fokát (nullpolinom esetén ∞-nek tekintve), akkor az előbbi összefüggések érvényesek azzal a változtatással, hogy $\leq$ helyett $\geq$, max helyett min áll.

	$f+g$			$f-g$			fg		
	δ	δ'	a_δ	δ	δ'	a_δ	δ	δ'	a_δ
5.a.	3	1	2	3	0	2	5	0	14
5.b.	3	1	2	3	2	2	5	2	2
5.c.	2	1	1	2	1	1	2	0	1
5.d.	3	2	4	–	–	–	6	4	4
5.e.	3	1	4	2	1	-4	6	3	4

4.1.5. Maradékos osztás

6. Az R gyűrű fölötti f polinom maradékosan osztható az ugyanezen gyűrű fölötti g polinommal, ha van $R[x]$-ben olyan q és r polinom, hogy $f = qg + r$, és $r = 0$, vagy $r \neq 0$ és $\deg r < \deg g$. Ha a maradékos osztás elvégezhető, akkor q a hányados és r a maradék, és ha $r = 0$, akkor f osztható g-vel.

Amennyiben g főegyütthatója egység R-ben, akkor a maradékos osztás tetszőleges f esetén elvégezhető. Hasonlóan mindig elvégezhető a maradékos osztás, ha vagy $f = 0$, vagy $f \neq 0$ és $g \neq 0$ és $\deg f < \deg g$, ugyanis $f = 0 \cdot g + f$ mindig igaz, és ezekben az esetekben vagy $f = 0$, vagy ha $f \neq 0$, akkor $\deg r = \deg f < \deg g$.

Ha a maradékos osztás elvégezhető, akkor az osztást úgy végezzük, hogy az osztó polinom legmagasabb fokú tagjával elosztjuk az osztandó polinom legmagasabb fokú tagját, majd a hányadossal megszorozzuk az osztó polinomot, és a szorzatpolinomot kivonjuk az osztandó polinomból. Ezt az osztást addig folytatjuk, amíg a kivonás után vagy nullát, vagy az osztó polinomnál alacsonyabbfokú polinomot kapunk. Mivel a kivonáskor az osztandó polinom legmagasabb fokú tagja kiesik, ezért a kivonás után kapott polinom vagy a nullpolinom, vagy alacsonyabb fokú, mint az osztandó polinom, így az osztási eljárás véges sok lépés után biztosan befejeződik.

6.a. $\mathbf{Z}$-ben 7 nem osztója 2-nek, és f foka nagyobb, mint g foka, így a maradékos osztás nem végezhető el, és akkor f nem osztható g-vel.

6.b. f és g nem nulla, és f foka kisebb, mint g foka, így a maradékos osztás elvégezhető, a hányados 0, és a maradék f:

$$\underbrace{7x^2+5x-3}_{f} = \underbrace{0}_{q} \cdot \underbrace{\left(2x^3-4x+3\right)}_{g} + \underbrace{\left(7x^2+5x-3\right)}_{r}$$

Mivel a maradék nem nulla, ezért f nem osztható g-vel.

6.c. **Q** test, és testben minden nem nulla elem egység, vagyis a test minden eleme osztható a test valamennyi nem nulla elemével, így test fölött minden nem nulla polinommal maradékosan osztható ugyanezen test fölötti valamennyi polinom. Ezen túl még az is igaz, hogy test fölötti polinomok esetén mind a hányados, mind a maradék egyértelmű.

$$\begin{gathered}
\left(2x^3-4x+3\right):\left(7x^2+5x-3\right)\\
\frac{2x^3}{7x^2}=\frac{2}{7}x\\
\frac{2}{7}x\cdot\left(7x^2+5x-3\right)=2x^3+\frac{10}{7}x^2-\frac{6}{7}x\\
\left(2x^3-4x+3\right)-\left(2x^3+\frac{10}{7}x^2-\frac{6}{7}x\right)=-\frac{10}{7}x^2-\frac{22}{7}x+3\\
2x^3-4x+3=\frac{2}{7}x\cdot\left(7x^2+5x-3\right)+\left(-\frac{10}{7}x^2-\frac{22}{7}x+3\right)
\end{gathered}$$

Mivel a maradék nem nulla, és a fokszáma nem kisebb az osztó fokszámánál, ezért folytatjuk az osztást:

$$\begin{gathered}
\left(-\frac{10}{7}x^2-\frac{22}{7}x+3\right):\left(7x^2+5x-3\right)\\
\frac{-\frac{10}{7}x^2}{7x^2}=-\frac{10}{49}\\
-\frac{10}{49}\cdot\left(7x^2+5x-3\right)=-\frac{10}{7}x^2-\frac{50}{49}x+\frac{30}{49}\\
\left(-\frac{10}{7}x^2-\frac{22}{7}x+3\right)-\left(-\frac{10}{7}x^2-\frac{50}{49}x+\frac{30}{49}\right)=-\frac{104}{49}x+\frac{117}{49}-\frac{10}{7}x^2-\frac{22}{7}x+3\\
=-\frac{10}{49}\cdot\left(7x^2+5x-3\right)+\left(-\frac{104}{49}x+\frac{117}{49}\right)
\end{gathered}$$

Most már a maradék fokszáma kisebb, mint az osztó fokszáma, így megkaptuk a maradékos osztás hányadosát és maradékát:

$$\begin{aligned}\underbrace{2x^3-4x+3}_{f} &= \frac{2}{7}x\cdot\left(7x^2+5x-3\right)+\left(-\frac{10}{7}x^2-\frac{22}{7}x+3\right)\\ &= \frac{2}{7}x\cdot\left(7x^2+5x-3\right)+-\frac{10}{49}\cdot\left(7x^2+5x-3\right)+\left(-\frac{104}{49}x+\frac{117}{49}\right)\\ &= \underbrace{\left(\frac{2}{7}x-\frac{10}{49}\right)}_{q}\cdot\underbrace{\left(7x^2+5x-3\right)}_{g}+\underbrace{\left(-\frac{104}{49}x+\frac{117}{49}\right)}_{r}\end{aligned}$$

vagyis

$$2x^3-4x+3=\left(\frac{2}{7}x-\frac{10}{49}\right)\cdot\left(7x^2+5x-3\right)+\left(-\frac{104}{49}x+\frac{117}{49}\right)$$

Ugyanez rövidebben:

$$\begin{array}{c}\left(2x^3-4x+3\right)\\ -\left(2x^3+\frac{10}{7}x^2-\frac{6}{7}x\right)\\ \hline -\frac{10}{7}x^2-\frac{22}{7}x+3\\ -\left(-\frac{10}{7}x^2-\frac{50}{49}x+\frac{30}{49}\right)\\ \hline -\frac{104}{49}x+\frac{117}{49}\end{array}\quad:\quad\left(7x^2+5x-3\right)\quad=\quad\frac{2}{7}x-\frac{10}{49}$$

vagy még rövidebben

$$\begin{array}{ccccc}\left(2x^3-4x+3\right) & : & \left(7x^2+5x-3\right) & = & \frac{2}{7}x-\frac{10}{49}\\ -\frac{10}{7}x^2-\frac{22}{7}x+3 & & & & \\ -\frac{104}{49}x+\frac{117}{49} & & & & \end{array}$$

és még ennél is rövidebben

$$\begin{array}{cccccccccccccc}(& 2 & 0 & -4 & 3 &) & : & (& 7 & 5 & -3 &) & = & \frac{2}{7} \quad -\frac{10}{49}\\ & & -\frac{10}{7} & -\frac{22}{7} & 3 & & & & & & & & & \\ & & & -\frac{104}{49} & \frac{117}{49} & & & & & & & & & \end{array}$$

(de ilyenkor ügyelni kell a 0 együtthatókra!)

6.d. 5 prímszám, így $\mathbf{Z}_5$ test. A továbbiakban gyakran kell majd $\mathbf{Z}_p$-ben számolnunk. Az összeadás, kivonás és szorzás könnyű: elvégezve a reprezentánsokkal a megfelelő műveletet, ez, és a vele modulo p kongruens valamennyi egész lesz az eredmény reprezentánsa. Az $\frac{a}{b}$ osztáshoz, ahol a és b $\mathbf{Z}_p$ elemei, és b nem a test nulleleme, a $bx \equiv a \ (p)$ kongruenciát kell megoldani, és ha c a megoldás, akkor $\frac{a}{b}=c$. Mivel p prímszám, és b nem osztható p-vel, ezért a kongruenciának van egy és csak egy megoldása. A kongruencia megoldására több módszer is létezik, ám kis p esetén hamar eredményre jutunk, ha a-hoz mindaddig hozzáadjuk p-t, amíg végül olyan számot kapunk, amely osztható b-vel. Az osztás eredménye lesz $\frac{a}{b}$. Valóban, mivel b nem a test nulleleme, ezért $p \nmid b$, vagyis $(b,p) = 1$. Ekkor $pk + a$ egy teljes maradékrendszer modulo b, ha k is egy teljes modulo b maradékrendszer, vagyis ha például $b > k \in \mathbf{N}_0$, így az $a + kp$ sorozatban lesz olyan elem, amely kongruens 0-val modulo b, vagyis olyan, amely osztható b-vel.

A konkrét példában $2x^3 - 4x + 3 = 2x^3 + x + 3$ és $7x^2 + 5x - 3 = 2x^2 + 2$,

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 2 & 0 & 1 & 3 &) & : & (& 2 & 0 & 2 &) & = & 1 & 0 \\
 & & & 4 & 3 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

tehát a hányados x, és a maradék $4x + 3$.

6.e. Most $f = 2x^3 - 4x + 3 = 2x^3 + 3x + 3$ és $g = 4x^2 + 5x - 3 = 3x^2 + 5x + 4$, így

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 2 & 0 & 3 & 3 &) & : & (& 4 & 5 & 4 &) & = & 4 & 2 \\
 & & 1 & 1 & 3 & & & & & & & & & & \\
 & & & 5 & 2 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$q = 4x + 2$, $r = 5x + 2$.

6.f. 8 nem prímszám, így $\mathbf{Z}_8$ nem test, ám 7 egység $\mathbf{Z}_8$-ban, hiszen $7 = -1$, így az osztás elvégezhető: $f = 2x^3 - 4x + 3 = 2x^3 + 4x + 3$, $g = 7x^2 + 5x - 3 = 7x^2 + 5x + 5$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 2 & 0 & 4 & 3 &) & : & (& 7 & 5 & 5 &) & = & 6 & 6 \\
 & & 2 & 6 & 3 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 5 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

tehát $q = 6x + 6$, $r = 5$.

6.g. $\mathbf{Z}_6$ szintén nem test, és 3 nullosztó ebben a gyűrűben. Mivel 3 többszörösei $\mathbf{Z}_6$-ban a 0 és a 3, vagyis 4 nem többszöröse 3-nak, így a maradékos osztás nem végezhető el.

6.h. 2 nullosztó $\mathbf{Z}_6$-ban, de az osztandó polinom főegyütthatója osztható az osztó főegyütthatójával, így elképzelhető, hogy elvégezhető az osztás.

$f = 4x^3 - 4x + 3 = 4x^3 + 2x + 3$, $g = 2x^2 + 5x - 3 = 2x^2 + 5x + 3$,

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 4 & 0 & 2 & 3 &) & : & (& 2 & 5 & 3 &) & = & 2 & 1 \\
 & & 2 & 2 & 3 & & & & & & & & & & \\
 & & & 3 & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

és $q = 2x + 1$, $r = 3x$. Ez azonban nem az egyetlen megoldás, ugyanis $(2,6) = 2$, így ha egy $2x \equiv u \ (6)$ kongruenciának van megoldása, akkor két megoldása van, és ezért az előbbi hányadoson és maradékon kívül még a következő megoldásokat kapjuk:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 4 & 0 & 2 & 3 &) & : & (& 2 & 5 & 3 &) & = & 2 & 4 \\
 & & 2 & 2 & 3 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 3 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

tehát $q = 2x + 4$, $r = 3$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 4 & 0 & 2 & 3 &) & : & (& 2 & 5 & 3 &) & = & 5 & 0 \\
 & & 5 & 5 & 3 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

de most nem tudjuk folytatni az osztást, mivel a 2 nem osztója 5-nek $\mathbf{Z}_6$-ban. Összességében azt kaptuk, hogy $\mathbf{Z}_6$-ban $f = 4x^3 - 4x + 3$-at $g = 2x^2 + 5x - 3$-mal maradékosan osztva két megoldást kapunk.

6.i. $f = 4x^3 - x^2 + 3 = 4x^3 + 5x^2 + 3$, $g = 2x^2 + 5x - 3 = 2x^2 + 5x + 3$,

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 4 & 5 & 0 & 3 &) & : & (& 2 & 5 & 3 &) & = & 2 & 0 \\
 & & 1 & 0 & 3 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

és most 1 nem osztható 2-vel $\mathbf{Z}_6$-ban, így nem folytatható az osztás, ez az f nem osztható maradékosan ezzel a g-vel $\mathbf{Z}_6$-ban. Annyi igaz, hogy

$$4x^3 - x^2 + 3 = 2x \cdot \left(2x^2 + 5x - 3\right) + \left(x^2 + 3\right)$$

de a maradék nem nulla, és a foka nem kisebb, mint az osztó foka.

6.j. $f = 4x^3 - 4x + 3 = 4x^3 + 2x + 3$, $g = 12x^2 + 5x - 3 = 5x + 3$, és

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 4 & 0 & 2 & 3 &) & : & (& 5 & 3 &) & = & 2 & 0 & 1 \\
 & & & 5 & 3 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

tehát g osztója f-nek $\mathbf{Z}_6$-ban, hiszen a maradék 0, és a megoldás egyértelmű, mert 5 egység ebben a gyűrűben.

6.k.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
(& \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} & \frac{4}{7} &) & : & (& \frac{3}{11} & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{5} &) \\
 & & & & & & & & & & = & \frac{22}{9} & 0 & \text{-}\frac{484}{243} & \\
 & & & -\frac{44}{81} & -\frac{22}{45} & -\frac{7}{8} & \frac{4}{7} & & & & & & & & \\
 & & & & -\frac{22}{45} & -\frac{7565}{17496} & \frac{8248}{8505} & & & & & & & &
\end{array}$$

azaz

$$\begin{aligned}
2/3x^5 - 7/8x + 4/7 = & \left(\frac{22}{9}x^2 - \frac{484}{243}\right)\left(3/11x^3 + 2/9x + 1/5\right) \\
& + \left(-\frac{22}{45}x^2 - \frac{7565}{17496}x + \frac{8248}{8505}\right)
\end{aligned}$$

6.l.

$$\begin{array}{ccccccccc}
(& e & -\ln 3 & \sin\pi/5 &) & : & (& e^2 & \pi/3 &) \\
 & & & & & & = & e^{-1} & -e^{-2}\times\left(\ln 3+e^{-1}\pi/3\right) & \\
 & & -\ln 3- e^{-1}\pi/3 & \sin\pi/5 & & & & & & \\
 & & & \sin\pi/5+ e^{-2}\pi/3\left(\ln 3+e^{-1}\pi/3\right) & & & & & &
\end{array}$$

a hányados $e^{-1}x{-}e^{-2}\left(\ln 3+e^{-1}\pi/3\right)$ és a maradék $\sin\pi/5{+}e^{-2}\pi/3\left(\ln 3+e^{-1}\pi/3\right)$.

6.m.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(& 3,17 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & 10,121 &) & : & (& 1,53 & 0 & 1/8 &) \\
 & & & & & & & & = & \frac{3,17}{1,53} & 0 & -\frac{3,17}{18,7272} & \\
 & & & -\frac{3,17}{12,24} & -\frac{2}{7} & 10,121 & & & & & & & \\
 & & & & -\frac{2}{7} & \frac{1519,4739296}{149,8176} & & & & & & &
\end{array}$$

6.n.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(& 3,17 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & 10,121 &) & : & (& 1,53 & 0 & \sqrt[3]{10} &) \\
 & & & & & & & & = & \frac{3,17}{1,53} & 0 & -\frac{3,17}{2,3409}\sqrt[3]{10} & \\
 & & & -\frac{3,17}{1,53}\sqrt[3]{10} & -\frac{2}{7} & 10,121 & & & & & & & \\
 & & & & -\frac{2}{7} & 10,121+\frac{3,17}{2,3409}\sqrt[3]{100} & & & & & & &
\end{array}$$

6.o.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(& 3+2i & 0 & 0 & -2+3i & 10+i &) & : & (& 2-5i & 0 & 3+7i &) \\
 & & & & & & & & = & (-4+19i)/29 & 0 & (15+23i)/29 & \\
 & & & 5-i & -2+3i & 10+i & & & & & & & \\
 & & & & -2+3i & 14-5i & & & & & & &
\end{array}$$

6.p. $\mathbf{H}_{10}$ gyűrű, ugyanis a megadott halmaz $\mathbf{R}$-nek egy nem üres, a kivonásra és szorzásra zárt részhalmaza, ugyanakkor ez a gyűrű nem test, mert például 2-nek nincs inverze ebben a gyűrűben. $a+b\sqrt{10}$ akkor és csak akkor egység ebben a gyűrűben, ha $\left|a^2-10b^2\right|=1$. Belátható, hogy ebben a gyűrűben végtelen sok egység van, és ezek mindegyike $\pm\left(3+\sqrt{10}\right)^n$ alakú, ahol n tetszőleges egész szám. Most g főegyütthatója egység, tehát a maradékos osztás elvégezhető:

$$\begin{array}{cccccccc}
(& 3+2\sqrt{10} & 0 & 0 & -2+3\sqrt{10} & 10+\sqrt{10} &) & : \\
 & & (& 3-\sqrt{10} & 0 & 3+7\sqrt{10} &) & \\
 & & = & -\left(29+9\sqrt{10}\right) & 0 & -\left(4451+1407\sqrt{10}\right) & & \\
 & & & 717+230\sqrt{10} & -2+3\sqrt{10} & 10+\sqrt{10} & & \\
 & & & & -2+3\sqrt{10} & 111853+35379\sqrt{10} & &
\end{array}$$

6.q. $\mathbf{H}_m$-ben, ahol m négyzetmentes egész, $\beta=b_1+b_2\sqrt{m}$ csak akkor osztója $\alpha=a_1+a_2\sqrt{m}$-nek, ha $b_1^2-mb_2^2 \mid a_1^2-ma_2^2$. Mivel $1^2-10\cdot1^2=-9\nmid-31=3^2-10\cdot4^2$, ezért f nem osztható maradékosan g-vel a megadott gyűrűben.

6.r. Bár 2 nem egység $\mathbf{Z}$-ben, de $2\mid 6$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
(& 6 & -7 & -10 & 24 & -11 &) & : & (& 2 & 1 & -3 &) & = & 3 \quad -5 \quad 2 \\
 & & -10 & -1 & 24 & -11 & & & & & & & & & \\
 & & & 4 & 9 & -11 & & & & & & & & & \\
 & & & & 7 & -5 & & & & & & & & &
\end{array}$$

a maradékos osztás tehát elvégezhető.

6.s. Tetszőleges gyűrű fölötti bármely g polinom esetén $0=0\cdot g+0$, vagyis a nullpolinom bármely más polinommal osztható (a felírásból jól látható, hogy még a nullpolinommal is, de ekkor q bármi lehet, tehát az most is érvényes, hogy a 0-val nem lehet osztani).

6.t. Tetszőleges gyűrűben bármely elemet a gyűrű nullelemével szorozva nullát kapunk, és ha $f\neq0$, akkor az $f=q\cdot0+f$ felírásban a maradék nem nulla, így a foka kisebb kellene, hogy legyen a nullpolinom fokánál, így a maradékos osztás nem végezhető el.

6.u. **6.s.**-ben már megválaszoltuk ezt a kérdést.

6.v.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(& 6 & -5 & 3 &) & : & (& 2 & -4 &) & = & 3 \quad 0 \\
 & & 7 & 3 & & & & & & & &
\end{array}$$

és tovább nem folytatható az osztás, vagyis $\mathbf{Z}$-ben ez az f nem osztható maradékosan g-vel.

4.1.6. Polinom gyökei néhány gyök ismeretében

7. Ha $\sum_{i=0}^n a_ix^i=f\in R[x]$, és $R\leq S$, akkor $u\mapsto\sum_{i=0}^n a_iu^i$, ahol $u\in S$, egy S feletti polinomfüggvény. u gyöke f-nek, ha $f(u)=0$, és u k-szoros gyöke f-nek, ha $(x-u)^k\mid f$ $S[x]$-ben. Az egyszeres gyököt az előbb két különböző módon, egyszer a polinomfüggvényekkel, a másik esetben a polinomok oszthatóságával definiáltuk.

Ha R integritási tartomány, akkor a két definíció azonos eredményt ad. Integritási tartományt megfelelően bővítve, a bővített gyűrűben vagy testben az integritási tartomány feletti nem nulla polinomnak a fokszámával megegyező számú gyöke van, ha a gyököket a többszörösségüknek megfelelően vesszük figyelembe, de nem integritási tartomány esetén a gyökök száma ennél nagyobb is lehet.

Test fölötti polinomok esetén elsőfokú polinomnak mindig van pontosan egy gyöke az alaptestben, komplex együtthatós polinom valamennyi gyöke komplex szám, míg ha α egy valós együtthatós polinom gyöke, akkor α konjugáltja is gyöke a polinomnak, és a két gyök ugyanannyiszoros gyöke a polinomnak (így páratlan fokú valós együtthatós polinomnak mindig van legalább egy valós gyöke).

7.a. f valós együtthatós polinom, így $-1/2 - i\sqrt{3}/2$ is kétszeres és $1 - i$ is háromszoros gyöke a polinomnak. Ezekkel a gyökökkel együtt a polinomnak 13 gyöke van, és több nem lehet.

7.b. $f = \sum_{j=0}^{5} a_j x^j = \sum_{j=0}^{2} a_j \left(x^j + x^{5-j}\right)$-ből

$$f(-1) = \sum_{j=0}^{2} a_j \left((-1)^j + (-1)^{5-j}\right) = 0$$

tehát -1 gyöke a polinomnak. Másrészt

$$x^5 \sum_{j=0}^{2} a_j \left(\left(x^{-1}\right)^j + \left(x^{-1}\right)^{5-j}\right) = \sum_{j=0}^{2} a_j \left(x^j + x^{5-j}\right)$$

ezért, ha α k-szoros gyöke a polinomnak, akkor α^{-1} is k-szoros gyöke f-nek, így $1/2$ is kétszeres gyöke a polinomnak, vagyis f gyökei a 2 és az $1/2$, amelyek kétszeres gyökök, valamint a -1 mint egyszeres gyök, és más gyöke nincs az ötödfokú polinomnak.

7.c. A feladat hasonló az előzőhöz, de most 1 a polinom ötödik gyöke.

7.d. **7.b.** alapján könnyű belátni, hogy ha $\alpha \neq 0$ k-szoros gyöke g-nek, akkor α^{-1} k-szoros gyöke f-nek, így f gyökei 1, -1, -1, $1/3$ és $1/4$.

7.e. $\sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} 2^{5-j} x^j = (x+2)^5$, így a polinom egyetlen gyöke a -2, amely ötszörös gyök.

7.f. A polinom deriváltja $f' = 5x^4 + x^3 + 3x^2 + 5x + 2$, és $d = (f, f') = x^3 + 3x + 2$. Ha f-et elosztjuk d-vel, akkor olyan polinomot kapunk, amelynek pontosan azok a gyökei, amelyek gyökei f-nek, de a hányadospolinom minden gyöke egyszeres. Most $f/d = x^2 + 2x + 6$. Ennek a gyökeit a másodfokú egyenletek megoldóképletével határozzuk meg, figyelembe véve a $\mathbf{Z}_7$-beli aritmetikát (minden nem 2-karakterisztikájú test esetén lehet alkalmazni a másodfokú egyenletek megoldóképletét). Ekkor

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-24}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} \frac{-1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

és a két gyök 2 és 3. Mivel két különböző gyökünk van, és d harmadfokú, ezért a deriváltnak az egyik gyök kétszeres, a másik egyszeres gyöke, és akkor az eredeti polinomnak az előbbi gyök háromszoros, az utóbbi kétszeres gyöke. Elosztva f-et $(x-2)(x-3)$ négyzetével, $x-2$-t kapunk, tehát a 2 háromszoros, a 3 kétszeres gyöke a polinomnak (most minden gyök eleme $\mathbf{Z}_7$-nek, de általában nem ez a helyzet!).

Egy lehetséges másik megoldás a következő. A polinomnak a 0 nem gyöke, így $\mathbf{Z}_7$-beli gyökei megegyeznek $d = \left(f, x^6-1\right)$ gyökeivel (de ennek minden gyöke egyszeres, míg f gyökei lehetnek többszörösek is). $d = x^2+2x+6$, és ha meghatároztuk d gyökeit, akkor a gyöktényezőkkel sorozatosan osztva meghatározhatjuk az egyes gyökök multiplicitását.

7.g. $x^7-1 \in \mathbf{C}[x]$ gyökei a 7-edik komplex egységgyökök, vagyis az $\varepsilon_k^{(7)} = \left(1, k\frac{2\pi}{7}\right) = \left(1, \frac{2\pi}{7}\right)^k$ komplex számok, ahol $7 > k \in \mathbf{N}_0$ ((r,φ) az $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex számot jelöli).

7.h. $x^6-1 \in \mathbf{Z}_7[x]$ gyökei a $\mathbf{Z}_7$ feletti 6-odik egységgyökök. $\mathbf{Z}_7$ multiplikatív csoportjának 6 eleme van, ezért ennek a csoportnak bármely u elemére $u^6 = 1$. Mivel hatodfokú polinomnak legfeljebb 6 különböző gyöke lehet, ezért $\mathbf{Z}_7^*$ (azaz $\mathbf{Z}_7$ nullától különböző) elemei és csak ezek a gyökei a polinomnak.

7.i. $x^7 - x = x\left(x^6-1\right)$. A polinomnak gyöke a 0, és az x-szel való osztás után az előbbi feladat polinomját kapjuk, így x^7-x gyökei $\mathbf{Z}_7$ elemei és csak ezek.

7.j. Ez hasonló az előző feladathoz: gyöke a 0, valamint a 6-odik komplex egységgyökök.

7.k. $f = x^{12}-x^7-x^5+1 = \left(x^7-1\right)\left(x^5-1\right)$, így a polinom gyökei az 5-ödik és 7-edik komplex egységgyökök, és mindegyik gyök egyszeres.

7.l. $f = x^{21}-3x^{14}+3x^7-1 = \left(x^7\right)^3 - 3\left(x^7\right)^2 + 3\left(x^7\right) - \left(x^7\right)^0 = \left(x^7-1\right)^3$. A polinom gyökei a 7-edik komplex egységgyökök, és mindegyik gyök háromszoros.

7.m. $f = x^2-5x = x(x-5)$, tehát a polinomnak gyöke a 0 és az 5. De $x^2-5x = (x-2)(x-3)$ is igaz, így a 2 és a 3 is gyöke a polinomnak. Behelyettesítve láthatjuk, hogy 1 és 4 nem gyöke a polinomnak, így a polinom gyökei 0, 2, 3 és 5. Mivel két azonos fokszámú főpolinom vagy megegyezik, vagy egyik sem osztója a másiknak, és a -5 nem osztható 2-vel $\mathbf{Z}_6$-ban, így f egyetlen gyöktényező négyzetével sem osztható, a polinom minden gyöke egyszeres.
Megjegyzés: Ennek a nullosztót is tartalmazó gyűrű fölötti másodfokú polinomnak négy gyöke van.

4.1.7. Polinom meghatározása a gyökeiből

8. Egy n-edfokú polinomnak $n+1$ együtthatója van, ez az $n+1$ elem egy adott gyűrű bármely eleme lehet, és a polinomot az együtthatói egyértelműen meghatározzák. A polinomot azonban más olyan elemek is meghatározzák, amelyekből egyértelműen meghatározható a polinom. Meghatározzák a polinomot például a gyökei – mindegyiket a multiplicitásával együtt megadva – és a főegyütthatója, ekkor $f = a_n \prod_{i=1}^{n}(x-u_i)$, ahol a_n a főegyüttható, és az u_i-k a gyökök, vagy megadhatjuk a polinom értékét $n+1$ különböző pontban. Ez utóbbi esetben a polinom például a Lagrange- vagy a Newton-féle interpolációval meghatározható, de meghatározható egy lineáris egyenletrendszer megoldásaként is.

8.a.

$$f = 3\left(x-2\right)\left(x-(3-i)\right)\left(x-(3+i)\right)\left(x-(-1+i)\right)^2\left(x-(-1-i)\right)^2$$
$$= 3x^7 - 12x^6 - 6x^5 + 36x^4 + 108x^3 - 48x^2 - 216x - 240;$$

8.b. $f = c\left(x-3\right)^2\left(x+2\right)^3 = c\left(x^5 - 15x^3 - 10x^2 + 60x + 72\right)$, $2 = f\left(0\right) = c \cdot 72$, és így $c = 1/36$, $f = 1/36x^5 - 5/12x^3 - 5/18x^2 + 5/3x + 2$;

8.c. $f = c\left(x-3\right)^2\left(x+2\right)^3 = c\left(x^5 - 15x^3 - 10x^2 + 60x + 72\right)$, $2 = f\left(1\right) = c \cdot 108$, és így $c = 1/54$, $f = 1/54x^5 - 5/18x^3 - 5/27x^2 + 10/9x + 4/3$;

8.d. Legyen $f = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i$. Ekkor $f\left(u\right) = \sum_{i=0}^{4} a_i u^i$, vagyis

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_0\left(-2\right)^0 & + & a_1\left(-2\right)^1 & + & a_2\left(-2\right)^2 & + & a_3\left(-2\right)^3 & + & a_4\left(-2\right)^4 & = & 2 \\
a_0\left(-1\right)^0 & + & a_1\left(-1\right)^1 & + & a_2\left(-1\right)^2 & + & a_3\left(-1\right)^3 & + & a_4\left(-1\right)^4 & = & 3 \\
a_0\left(0\right)^0 & + & a_1\left(0\right)^1 & + & a_2\left(0\right)^2 & + & a_3\left(0\right)^3 & + & a_4\left(0\right)^4 & = & 4 \\
a_0\left(1\right)^0 & + & a_1\left(1\right)^1 & + & a_2\left(1\right)^2 & + & a_3\left(1\right)^3 & + & a_4\left(1\right)^4 & = & 5 \\
a_0\left(2\right)^0 & + & a_1\left(2\right)^1 & + & a_2\left(2\right)^2 & + & a_3\left(2\right)^3 & + & a_4\left(2\right)^4 & = & 6
\end{array}$$

azaz

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_0 & - & 2a_1 & + & 4a_2 & - & 8a_3 & + & 16a_4 & = & 2 \\
a_0 & - & a_1 & + & a_2 & - & a_3 & + & a_4 & = & 3 \\
a_0 & & & & & & & & & = & 4 \\
a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & = & 5 \\
a_0 & + & 2a_1 & + & 4a_2 & + & 8a_3 & + & 16a_4 & = & 6
\end{array}$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{array}{ccc}
a_0 & = & 4 \\
a_1 & = & 1 \\
a2 & = & 0 \\
a3 & = & 0 \\
a4 & = & 0
\end{array}$$

és a polinom $f = x + 4$.

8.e. A feladatot a Lagrange-féle interpolációval oldjuk meg. Ha adott egy egységelemes kommutatív gyűrű n különböző eleme, $u_1, \ldots, u_n$, akkor

$$L_k^{(u_1,\ldots,u_n)} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x-u_i)}{(u_k-u_i)}$$

olyan $n-1$-edfokú polinom, hogy $l \neq k$-ra $L_k^{(u_1,\ldots,u_n)}(u_l) = 0$, és $L_k^{(u_1,\ldots,u_n)}(u_k) = e$. Ha most még megadjuk a gyűrű n tetszőleges elemét, $v_1, \ldots, v_n$-et, akkor

$$f = \sum_{l=1}^{n} v_l L_l^{(u_1,\ldots,u_n)}$$

u_k-ban éppen v_k, és f egy legfeljebb $n-1$-edfokú polinom.

A megadott adatokkal

$$\begin{array}{lclcl}
L_1^{(-2,-1,0,1,2)} & = & \frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-0)(-2-1)(-2-2)} & = & \frac{1}{24}\left(x^4-2x^3-x^2+2x\right) \\
L_2^{(-2,-1,0,1,2)} & = & \frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)(-1-2)} & = & -\frac{1}{6}\left(x^4-x^3-4x^2+4x\right) \\
L_3^{(-2,-1,0,1,2)} & = & \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)} & = & \frac{1}{4}\left(x^4-5x^2+4\right) \\
L_4^{(-2,-1,0,1,2)} & = & \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-0)(1-2)} & = & -\frac{1}{6}\left(x^4+x^3-4x^2-4x\right) \\
L_5^{(-2,-1,0,1,2)} & = & \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-0)(2-1)} & = & \frac{1}{24}\left(x^4+2x^3-x^2-2x\right)
\end{array}$$

és

$$f = -2L_1^{(-2,-1,0,1,2)} - L_2^{(-2,-1,0,1,2)} + L_4^{(-2,-1,0,1,2)} + 2L_5^{(-2,-1,0,1,2)} = x$$

8.f. Ezt a példát a Newton-módszerrel oldjuk meg. Legyen $n \geq k \in \mathbf{N}$-ra $N_k^{(u_1,\ldots,u_n)} = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(x-u_i)}{(u_k-u_i)}$, továbbá legyen $f^{(1)} = v_1$, és tegyük fel, hogy egy $n > k \in \mathbf{N}$-ra $f^{(k)}$ olyan legfeljebb $k-1$-edfokú polinom, hogy minden $k \geq i \in \mathbf{N}$ esetén $f^{(k)}(u_i) = v_i$. Ekkor $f^{(k+1)} = f^{(k)} + \left(v_{k+1} - f^{(k)}(u_{k+1})\right) N_{k+1}^{(u_1,\ldots,u_n)}$ legfeljebb k-adfokú, és $k+1 \geq i \in \mathbf{N}$ esetén $f^{(k+1)}(u_i) = v_i$. A példa adataival

$$\begin{array}{lclcl}
N_1 & = & 1 & & \\
N_2 & = & \frac{x+2}{-1+2} & = & x+2 \\
N_3 & = & \frac{(x+2)(x+1)}{(0+2)(0+1)} & = & \frac{1}{2}\left(x^2+3x+2\right) \\
N_4 & = & \frac{(x+2)(x+1)(x-0)}{(1+2)(1+1)(1-0)} & = & \frac{1}{6}\left(x^3+3x^2+2x\right) \\
N_5 & = & \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-0)(2-1)} & = & \frac{1}{24}\left(x^4+2x^3-x^2-2x\right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
f^{(1)} & = & -2 \\
f^{(2)} & = & -2 + (-1-(-2))(x+2) = x \\
f^{(3)} & = & x + (3-0)\frac{1}{2}\left(x^2+3x+2\right) = \frac{1}{2}\left(3x^2+11x+6\right) \\
f^{(4)} & = & \frac{1}{2}\left(3x^2+11x+6\right) + (1-10)\frac{1}{6}\left(x^3+3x^2+2x\right) \\
 & = & \frac{1}{2}\left(-3x^3-6x^2+5x+6\right) \\
f^{(5)} & = & \frac{1}{2}\left(-3x^3-6x^2+5x+6\right) + (2-(-16))\frac{1}{24}\left(x^4+2x^3-x^2-2x\right) \\
 & = & \frac{1}{4}\left(3x^4-15x^2+4x+12\right)
\end{array}$$

vagyis $f = \frac{3}{4}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + x + 3$;

8.g. $f = (-3/8 - 1/4i)x^3 + (3/8 - 1/8i)x^2 + (1 - 1/4i)x + (1/4 - 1/4i)$.

8.h. $f = 193/1890x^4 - 244/189x^3 + 7781/1512x^2 - 383/56x + 121/420.$

8.i. $f = x^4 + 2x.$

8.j. $f = -5/6x^4 + 19/3x^3 - 44/3x^2 + 61/6x.$

8.k. $f = 3x^3 + 2x^2 + x.$

8.l. $f = 5x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x.$

8.m. Most három olyan feladat van, ahol x megadott értékei megegyeznek. Ilyen esetben a Lagrange-módszert érdemes alkalmazni, mert az alappolinomok azonosak, így azokat csak egyszer kell kiszámolni, és utána az egyes feladatok eredményét már lineáris kombinációként számolhatjuk.

8.m.i. $f = 1/2x^4 - 5/2x^2 + x + 2$

8.m.ii. $f = 1/4x^4 + 1/2x^3 - 5/4x^2 - 1/2x + 2$

8.m.iii. $f = 5/8x^4 - 5/4x^3 - 21/8x^2 + 17/4x + 1$

8.m.iv. $f = 0$ (Egy test fölötti nem nulla polinomnak nem lehet a fokánál több gyöke még a gyökök többszörösségével sem!)

8.n. $f = 2x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 2x^5 - 20x^4 + 70x^3 - 100x^2 + 48x$

8.o. $f = 2x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 2x^5 - 20x^4 + 70x^3 - 100x^2 + 48x = 2x^5 + 3x = 2(x^5 - x)$ (q-elemű test fölötti $x^q - x$ polinomnak a test minden eleme egyszeres gyöke, és más gyöke ennek a polinomnak nincs!)

8.p. $f = 5/18x^3 - 1/9x^2 - 65/18x + 4/9$

8.q. $f = \left(13/18x^2 - 35/18x - 16/9\right) + c\left(x^3 - 3x^2 - 6x + 8\right)$, ahol c tetszőleges egész szám. A második része a polinomnak olyan, amely a megadott pontok mindegyikében 0.

8.r. $f = \left(13/18x^2 - 35/18x - 16/9\right) + \left(x^3 - 3x^2 - 6x + 8\right)g$, ahol g tetszőleges egész együtthatós polinom. A második része a polinomnak olyan, amely a megadott pontok mindegyikében 0.

4.1.8. Gyökök és együtthatók kapcsolata

9. Ha $0 \neq \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = f \in R[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol R integritási tartomány, akkor mindig van olyan K test, amelynek részgyűrűje R, és amelyben vannak olyan – nem feltétlenül különböző – $u_1, \ldots, u_n$ elemek, amelyekkel $f = a_n \prod_{i=1}^{n}(x - u_i)$. Ha az előbbi gyöktényezős alakban elvégezzük a szorzásokat, és összevonjuk az azonos kitevőhöz tartozó tagokat, akkor a kapott polinom együtthatói éppen a_i-k lesznek. A szorzáskor i-edfokú tagot kapunk, ha az n darab $x - u_j$ tényező közül i tényezőből az x-et, a többi $n - i$ tényezőből $-u_j$-t szorozzuk össze. Ekkor azt kapjuk, hogy $a_i = (-1)^{n-i} a_n \sum_{\substack{A \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |A| = n-i}} \prod_{l \in A} u_l$. Ez az összefüggés, a gyökök és együtthatók közötti összefüggés, amely a másodfokú polinomok esetén jól ismert a középiskolából, azt a tényt mutatja, hogy a gyökök és a főegyüttható egyértelműen meghatározza a polinomot.

9.a. $f = -4\left(x^3 + x^2 + 4x - 5\right) = -4x^3 - 4x^2 - 16x + 20$

9.b. $f = 3\left(x^3 + x^2 - 3x + 2\right) = 3x^3 + 3x^2 + 5x + 6$

9.c.

$$\begin{aligned} 1 = (-1)^2 = (u_1 + u_2 + u_3)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2\left(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3\right) \\ = 7 + 2\left(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3\right), \end{aligned}$$

és innen $u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = -3$, tehát $f = -4\left(x^3 + x^2 - 3x - 5\right) = -4x^3 - 4x^2 + 12x + 20$;

9.d. $u_2^2 + u_3^2 = 2 - u_1^2 = 2 - 4 = 5$ így

$$u_2 + u_3 = \sqrt{\left(u_2^2 + u_3^2\right) + 2u_2u_3} = \sqrt{5 + 2 \cdot 5} = 1$$

tehát $f = 3\,(x + 2)\left(x^2 + 6x + 5\right) = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$;

9.e. **9.c.**-ben láttuk, hogy $(u_1 + u_2 + u_3)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2\left(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3\right)$, tehát

$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = \frac{1}{2}\left((u_1 + u_2 + u_3)^2 - \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right)\right) = 4\left((-1)^2 - 2\right) = 3$$

$$(u_1 + u_2 + u_3)^3 = \left(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3\right) + 3\left(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3\right)(u_1 + u_2 + u_3) - 3u_1u_2u_3$$

és ebből

$$\begin{aligned} u_1u_2u_3 = \frac{1}{6}\left((u_1 + u_2 + u_3)^3 - 3\,(u_1 + u_2 + u_3)\left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right) + 2\left(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3\right)\right) \\ = -\left((-1)^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 2\right) = 5, \end{aligned}$$

tehát $f = 3\left(x^3 + x^2 + 3x - 5\right) = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 6$.

9.f. $f = 2\left(x^3 - 3x^2 + 2x + 5\right) = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 10$

9.g. $f = 3\left(x^3 - 5x^2 + 9x - 5\right) = 3x^3 - 15x^2 + 27x - 15$ és

$$f = 3\left(x^3 + 5x^2 + 9x - 5\right) = 3x^3 + 15x^2 + 27x - 15$$

9.h. $f = c\left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right)$, ahol c a $\mathbf{Q}$ tetszőleges eleme.

9.i. $f = c\left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right)$, ahol c a $\mathbf{Q}$ tetszőleges eleme.

4.1.9. Horner-módszer

10. Polinom helyettesítési értékének gyors kiszámítása a Horner-módszerrel történhet. Ha f a kommutatív, egységelemes R gyűrű feletti polinom, és u az R egy eleme, akkor $f = (x - u)\,g + f\,(u)$, ahol g is egy R feletti polinom. Legyen $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, vagyis egy legfeljebb n-edfokú polinom. Ekkor g egy legfeljebb $n-1$-edfokú polinom (ha f konstans polinom, akkor g a nullpolinom), vagyis $g = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$. Innen

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i x^i &= (x-u)\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + f(u) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_{i-1} x^i - \sum_{i=0}^{n-1} (u b_i)\, x^i + f(u) \\
&= (f(u) - u b_0) + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i-1} - u b_i)\, x^i + b_{n-1} x^n
\end{aligned}$$

azaz a $b_{n-1} = a_n$, $b_{k-1} = u \cdot b_k + a_k$ rekurzióval, ahol $n > k \in \mathbf{N}_0$, $f(u) = b_{-1}$. Az is látható, hogy a rekurzióval egyúttal a hányadospolinom együtthatóit is megkapjuk.

10.a. $f+g = 3x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 9$, $fg = -6x^8 + 15x^6 - 37x^5 + 14x^4 + 6x^3 - 57x^2 + 87x - 22 = gf$

u	3	0	0	2	-7	2	$f(u)$
3		3	$3\cdot 3+0$ $=9$	$3\cdot 9+0$ $=27$	$3\cdot 27+2$ $=83$	$3\cdot 83-7$ $=242$	$3\cdot 242+2$ $=728$

u	-2	0	5	-11	$g(u)$
3		-2	$3\cdot(-2)+0$ $=-6$	$3\cdot(-6)+5$ $=-13$	$3\cdot(-13)-11$ $=-50$

u	3	0	-2	2	-2	-9	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
3		3	9	25	77	229	678	678

u	-6	0	15	-37	14	6	-57	87	-22	$(fg)(u)$
3		-6	-18	-39	-154	-448	-1338	-4071	-12126	-36400

és $f(u)\,g(u) = -36400 = (fg)(u)$

10.b. $f+g = x^3 + 7x^2 - 7x - 9$, $fg = -6x^6 + 11x^5 + 24x^4 - 72x^3 - 12x^2 + 77x - 22 = gf$

u	3	2	-7	2	$f(u)$
-2		3	-4	1	0

u	-2	5	0	-11	$g(u)$
-2		-2	9	-18	25

u	1	7	-7	-9	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
-2		1	5	-17	25	25

u	-6	11	24	-72	-12	77	-22	$(fg)(u)$	$f(u)g(u)$
-2		-6	23	-22	-28	44	-11	0	0

10.c. $f+g=3x^3-2x-9,\ fg=-6x^5+11x^4-9x^3-61x^2+87x-22=gf$

u	3	2	-7	2	$f(u)$
$1/2$		3	$7/2$	$-21/4$	$-5/8$

u	-2	5	-11	$g(u)$
$1/2$		-2	4	-9

u	3	0	-2	-9	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
$1/2$		3	$3/2$	$-5/4$	$-77/8$	$-77/8$

u	-6	11	-9	-61	87	-22	$(fg)(u)$	$f(u)g(u)$
$1/2$		-6	8	-5	$-127/2$	$221/4$	$45/8$	$45/8$

10.d. $f+g=x^3-2x-9,\ fg=-6x^5+11x^4-9x^3-61x^2+87x-22=gf$

u	3	2	-7	2	$f(u)$
$1-i$		3	$5-3i$	$-5-8i$	$-11-3i$

u	-2	5	-11	$g(u)$
$1-i$		-2	$3+2i$	$-6-i$

u	3	0	-2	-9	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
$1-i$		3	$3-3i$	$-2-6i$	$-17-4i$	$-17-4i$

u	-6	11	-9	-61	87	-22	$(fg)(u)$	$f(u)g(u)$
$1-i$		-6	$5+6i$	$2+i$	$-58-i$	$28+57i$	$63+29i$	$63+29i$

10.e.

$$f+g=(-2+2i)x^3+(2-i)x^2-(2+2i)x+(1+3i)$$

$$\begin{aligned}fg=&(-2+6i)x^5+(16-12i)x^4-(3+11i)x^3\\&+(-39+i)x^2+(20+26i)x+(2-6i)=gf\end{aligned}$$

u	$2-i$	$-(7-i)$	$2+4i$	$f(u)$
$1-2i$		$2-i$	$-7-6i$	$-17+12i$

u	$-2+2i$	0	$5-i$	$-(1+i$	$g(u)$
$1-2i$		$-2+2i$	$2+6i$	$19+i$	$20-38i$

u	$-2+2i$	$2-i$	$-(2+2i)$	$1+3i$	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
$1-2i$		$-2+2i$	$4+5i$	$12-5i$	$3-26i$	$3-26i$

u	$-2+6i$	$16-12i$	$-(3+11i)$	$-39+i$	$20+26i$	$2-6i$
$1-2i$		$-2+6i$	$26-2i$	$9-65i$	$-150-102i$	$-334+224i$
						$(fg)(u)$
						$116+886i$

$f(u)+g(u)=3-26i=(f+g)(u)\,,\ f(u)\,g(u)=116+886i=(fg)(u)\,.$

10.f. $f=3x^5+2x^2-7x+2=2x^2+2x+2$, $g=-2x^3+5x-11=x^3+2x+1, f+g=x^3+2x^2+x$, $fg=2x^5+2x^4+2=gf$. Tetszőleges h polinom esetén $h(0)=h_0$, ahol h_0 a polinom konstans tagja. Mivel $3 \bmod 3=0$, ezért $f(3)=f(0)=2$, $g(3)=g(0)=1$, $(f+g)(3)=(f+g)(0)=0=f(0)+g(0)$, $(fg)(3)=(fg)(0)=2=f(0)\,g(0)$.

10.g. $f=3x^5+2x^2-7x+2=3x^5+2x^2+3x+2$, $g=-2x^3+5x-11=3x^3+4, f+g=3x^5+3x^3+2x^2+3x+1$, $fg=4x^8+3x^5+4x^4+x^3+3x^2+2x+3=gf$

u	3	0	0	2	3	2	$f(u)$
3		3	4	2	3	2	3

u	3	0	0	4	$g(u)$
3		3	4	2	0

u	3	0	3	2	3	1	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
3		3	4	0	2	4	3	3

u	4	0	0	3	4	1	3	2	3	$(fg)(u)$	$f(u)\,g(u)$
3		4	2	1	1	2	2	4	4	0	0

10.h. $f=3x^5+2x^2-7x+2=3x^5+2x^2+5x+2$, $g=-2x^3+5x-11=4x^3+5x+1, f+g=3x^5+4x^3+2x^2+4x+3$, $fg=3x^6+5x^5+2x^4+3x^2+3x+2=gf$

u	3	0	0	2	5	2	$f(u)$
3		3	3	3	5	2	2

u	4	0	5	1	$g(u)$
3		4	0	5	4

u	3	0	4	2	4	3	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
3		3	3	1	5	1	0	0

u	3	5	2	0	2	3	2	$(fg)(u)$	$f(u)g(u)$
3		3	2	2	0	3	0	2	2

10.i. $f = x-2 = x+4$, $g = x-3 = x+3$, $f+g = 2x+1$, $fg = x^2+x = gf$; $f(5) = 3 \neq 0$, $g(5) = 2 \neq 0$, $f(5)+g(5) = 5 = (f+g)(5)$, $f(5)g(5) = 0 = (fg)(5)$. Bár sem $f(5)$, sem $g(5)$ nem 0, tehát az 5 sem f-nek, sem g-nek nem gyöke, $(fg)(5) = 0$, vagyis a szorzatpolinomnak gyöke 5. Ennek az az oka, hogy $\mathbf{Z}_6$ nem nullosztómentes.

10.j. Mivel a következő három feladatban ugyanaz a gyűrű és ugyanaz a polinom, ezért elegendő a táblázatot egyszer megrajzolni, és ugyanabban a táblázatban számolni a különböző pontokban vett helyettesítési értéket.

$f+g = 2x^2+2$, $fg = x^4+x^2+1 = gf$;

u	1	-1	1	$f(u)$
-1		1	-2	3
$-1/2+i\sqrt{3}/2$		1	$-3/2+i\sqrt{3}/2$	$1-i\sqrt{3}$
$1/2+i\sqrt{3}/2$		1	$-1/2+i\sqrt{3}/2$	0

u	1	1	1	$g(u)$
-1		1	0	1
$-1/2+i\sqrt{3}/2$		1	$1/2+i\sqrt{3}/2$	0
$1/2+i\sqrt{3}/2$		1	$3/2+i\sqrt{3}/2$	$1+i\sqrt{3}$

u	2	0	2	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
-1		2	-2	4	4
$-1/2+i\sqrt{3}/2$		2	$-1+i\sqrt{3}$	$1-i\sqrt{3}$	$1-i\sqrt{3}$
$1/2+i\sqrt{3}/2$		2	$1+i\sqrt{3}$	$1+i\sqrt{3}$	$1+i\sqrt{3}$

u	1	0	1	0	1	$(fg)(u)$
-1		1	-1	2	-2	3
-1/2+i$\sqrt{3}$/2		1	-1/2+i$\sqrt{3}$/2	1/2-i$\sqrt{3}$/2	1/2+i$\sqrt{3}$/2	0
1/2+i$\sqrt{3}$/2		1	1/2+i$\sqrt{3}$/2	1/2+i$\sqrt{3}$/2	-1/2+i$\sqrt{3}$/2	0

f(u)g(u)
3
0
0

10.k. $f+g=2x^3,\ fg=x^6-1=gf;$

u	1	0	0	-1	$f(u)$
$-1/2+i\sqrt{3}/2$		1	$-1/2+i\sqrt{3}/2$	$-1/2-i\sqrt{3}/2$	0

u	1	0	0	1	$g(u)$
$-1/2+i\sqrt{3}/2$		1	$-1/2+i\sqrt{3}/2$	$-1/2-i\sqrt{3}/2$	2

u	2	0	0	0	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
$-1/2+i\sqrt{3}/2$		2	$-1+i\sqrt{3}$	$-1-i\sqrt{3}$	2	2

u	1	0	0	0	0	0	-1	$(fg)(u)$	$f(u)g(u)$
$-1/2+i\sqrt{3}/2$		1	$-1/2+i\sqrt{3}/2$	$-1/2-i\sqrt{3}/2$	1	$-1/2+i\sqrt{3}/2$	$-1/2-i\sqrt{3}/2$	0	0

10.l. $f+g=2x^3+4x,\ fg=x^6-1=gf;$

u	1	0	0	-1	$f(u)$
$1/2+i\sqrt{3}/2$		1	$-3/2+i\sqrt{3}/2$	$1/2-i\sqrt{3}/2$	0

u	1	0	0	1	$g(u)$
$1/2+i\sqrt{3}/2$		1	$5/2+i\sqrt{3}/2$	$5/2+i3\sqrt{3}/2$	$2i\sqrt{3}$

u	2	0	4	0	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
$1/2+i\sqrt{3}/2$		2	$1+i\sqrt{3}$	$3+i\sqrt{3}$	$2i\sqrt{3}$	$2i\sqrt{3}$

u	1	0	0	0	0	0	-1	$(fg)(u)$	$f(u)g(u)$
$1/2+i\sqrt{3}/2$		1	$1/2+i\sqrt{3}/2$	$-1/2+i\sqrt{3}/2$	-1	$-1/2-i\sqrt{3}/2$	$1/2-i\sqrt{3}/2$	0	0

10.m. $f+g=2x^2+2,\ fg=x^4+x^2+1=gf$

u	1	-1	1	$f(u)$
$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

u	1	1	1	$g(u)$
$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 3/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 3/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$

u	2	0	2	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$		2	$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$		2	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$		2	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 16 & 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 16 & 20 \end{pmatrix}$

u	1	0	1	0
$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

u		1	$(fg)(u)$
$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9 & -20 \\ 20 & -9 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 26 & 24 \\ 48 & 26 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 & 76 \\ 152 & 123 \end{pmatrix}$

u	$f(u)\,g(u)$	$g(u)\,f(u)$
$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9 & -20 \\ 20 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9 & -20 \\ 20 & -9 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 & 76 \\ 152 & 123 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 & 76 \\ 152 & 123 \end{pmatrix}$

Bár a mátrixok szorzása nem kommutatív, de most speciális mátrixokat szoroztunk, így $(fg)(u) = f(u)\,g(u) = g(u)\,f(u)$.

10.n. $f + g = 2x^2 - 14,\ fg = x^4 - 18x^2 + 49 = gf$

u	1	-2	-7	$f(u)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

u	1	2	-7	$g(u)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$

u	2	0	-14	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$		2	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$

u	1	0	-18	0	49	$(fg)(u)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -14 \\ -28 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
					$f(u)\,g(u)$	$g(u)\,f(u)$
					$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bár a mátrixok szorzása nem kommutatív, de most speciális mátrixokat szoroztunk, így $(fg)(u) = f(u)\,g(u) = g(u)\,f(u)$.

10.o. $f + g = 2x,\ fg = x^2 + 1 = gf$

u	1	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$f(u)$
$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2i & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2i \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} \left(1+\sqrt{2}/2\right) i & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\left(1+\sqrt{2}/2\right) i \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} ai & b \\ -\bar{b} & -ai \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} (a+1)\,i & b \\ -\bar{b} & -(a+1)\,i \end{pmatrix}$

u	$1 \quad -\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$g\left(u\right)$
$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2i & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2i \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} -\left(1-\sqrt{2}/2\right)i & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \left(1-\sqrt{2}/2\right)i \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} ai & b \\ -\bar{b} & -ai \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} \left(a-1\right)i & b \\ -\bar{b} & -\left(a-1\right)i \end{pmatrix}$

u	$2 \quad 0$	$\left(f+g\right)\left(u\right)$	$f\left(u\right)+g\left(u\right)$
$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2i & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2i \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} \sqrt{2}i & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2}i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{2}i & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2}i \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} ai & b \\ -\bar{b} & -ai \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 2ai & 2b \\ -2\bar{b} & -2ai \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2ai & 2b \\ -2\bar{b} & -2ai \end{pmatrix}$

u	1	0	1	$(fg)(u)$
$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2i & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2i \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2i & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} ai & b \\ -\bar{b} & -ai \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} ai & b \\ -\bar{b} & -ai \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
u			$f(u)\,g(u)$	$g(u)\,f(u)$
$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2i & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2i \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}i \\ \sqrt{2}i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} ai & b \\ -\bar{b} & -ai \end{pmatrix}$			$\begin{pmatrix} 0 & 2bi \\ 2\bar{b}i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2bi \\ -2\bar{b}i & 0 \end{pmatrix}$

A másodfokú polinomnak végtelen sok gyöke van. Ennek az az oka, hogy a mátrixok szorzása általában nem kommutatív (a megadott mátrixok mindegyike speciális, és az ilyen mátrixok részgyűrűt alkotnak, amely izomorf a kvaterniók ferdetestével). A kommutativitás hiánya ott is látszik, hogy $f(u)\,g(u) \neq (fg)(u)$, kivéve az első példát.

10.p. $f+g = 2x - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $fg = x^2 - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$, $gf = x^2 - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 13 & 20 \end{pmatrix}$

u	1	$-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$f(u)$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

u	1	$-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$g(u)$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

u	2	$-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$	$(f+g)(u)$	$f(u)+g(u)$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$		2	$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -13 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -13 & 3 \end{pmatrix}$

u	1	$-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$	$(fg)(u)$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 21 & 2 \\ -43 & 11 \end{pmatrix}$
u				$f(u)\,g(u)$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$				$\begin{pmatrix} 22 & -7 \\ -25 & 8 \end{pmatrix}$

u	1	$-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 13 & 20 \end{pmatrix}$	$(gf)(u)$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 & -6 \\ -43 & 19 \end{pmatrix}$
u				$g(u)\,f(u)$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$				$\begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -19 & 23 \end{pmatrix}$

A mátrixok gyűrűje nem kommutatív, és a megadott pontban $(fg)(u)$, $(gf)(u)$, $f(u)\,g(u)$ és $g(u)\,f(u)$ négy különböző érték.

4.1.10. Maradékos osztás elsőfokú polinommal és a Horner-módszer

11. Ha R egységelemes kommutatív gyűrű, akkor tetszőleges $u \in R$-rel és $f \in R[x]$-szel $f = (x-u)\,g + f(u)$, ahol g együtthatói a helyettesítési érték Horner-módszerrel történő kiszámítása során keletkező értékek, így f-nek $x-u$-val való maradékos osztását meghatározhatjuk az $f(u)$ kiszámításával is: a hányadospolinom, q, egyenlő g-vel, és az r maradékpolinom az $f(u)$ helyettesítési érték.

11.a. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$

11.a.i. $g = x - 3,\ R = \mathbf{Z}$;

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
(& 3 & 0 & 0 & 2 & -7 & 2 &) & : & (& 1 & -3 &) & = & 3 & 9 & 27 & 83 & 242 \\
 & & 9 & 0 & 2 & -7 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 27 & 2 & -7 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 83 & -7 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 242 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 728 & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

tehát $q = 3x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 83x + 242$, és $r = 728$.

11.a.ii. $g = x + 2, R = \mathbf{Z}$;

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
(& 3 & 0 & 0 & 2 & -7 & 2 &) & : & (& 1 & 2 &) & = & 3 & -6 & 12 & -22 & 37 \\
 & & -6 & 0 & 2 & -7 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 12 & 2 & -7 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & -22 & -7 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 37 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & -72 & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

tehát $q = 3x^4 - x^3 + 12x^2 - 22x + 37$, és $r = -72$.

11.a.iii. $g = x - 1/2, R = \mathbf{Q}$;

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 3 & 0 & 0 & 2 & -7 & 2 &) & : & (& 1 & -1/2 &) & = \\
 & & & & & & & & & 3 & 3/2 & 3/4 & 19/8 & -93/16 \\
 & & 3/2 & 0 & 2 & -7 & 2 & & & & & & & \\
 & & & 3/4 & 2 & -7 & 2 & & & & & & & \\
 & & & & 19/8 & -7 & 2 & & & & & & & \\
 & & & & & -93/16 & 2 & & & & & & & \\
 & & & & & & -29/32 & & & & & & &
\end{array}
$$

tehát $q = 3x^4 + 3/2x^3 + 3/4x^2 + 19/8x - 93/16$, és $r = -29/32$.

Az előbbi három osztást behelyettesítéssel végezve

u	3	0	0	2	-7	2	$f(u)$
3		3	9	27	83	242	728
-2		3	-6	12	-22	37	-72
$1/2$		3	$3/2$	$3/4$	$19/8$	$-93/16$	$-29/32$

Látható, hogy az eredmény ugyanaz, de a számolás lényegesen gyorsabb.

11.b. $f = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$, $g = x - (1 - i)$, $R = \mathbf{C}$;

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(& 3 & 2 & -7 & 2 &) & : & (& 1 & -(1-i) &) & = \\
 & & & & & & & & & 3 & 5-3i & -5-8i \\
 & & 5-3i & -7 & 2 & & & & & & & \\
 & & & -5-8i & 2 & & & & & & & \\
 & & & & -11-3i & & & & & & &
\end{array}$$

így $q = 3x^2 + (5 - 3i)x - (5 + 8i)$ és $r = -11 - 3i$. Másként

u	3	2	-7	2	$f(u)$
$1-i$		3	$5-3i$	$-5-8i$	$-11-3i$

11.c. $f = (2 - i)x^2 - (7 + i)x + (2 + 4i)$, $g = x - (1 - 2i)$, $R = \mathbf{C}$;

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(& 2-i & -(7+i) & 2+4i &) & : & (& 1 & -(1-2i) &) & = & 2-i & -(7+6i) \\
 & & -7-6i & 2+4i & & & & & & & & & \\
 & & & -17+12i & & & & & & & & &
\end{array}$$

így $q = (2 - i)x - (7 + 6i)$ és $r = -17 + 12i$. Másként

u	$2-i$	$-(7+i)$	$2+4i$	$f(u)$
$1-2i$		$2-i$	$-7-6i$	$-17+12i$

11.d. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$, $g = x - 3$,

11.d.i. $R = \mathbf{Z}_3$; most $f = 2x^2 + 2x + 2$ és $g = x$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(& 2 & 2 & 2 &) & : & (& 1 & 0 &) & = & 2 & 2 \\
 & & 2 & 2 & & & & & & & & & \\
 & & & 2 & & & & & & & & &
\end{array}$$

tehát $q = 2x + 2$, és $r = 2$.

u	2	2	2	$f(u)$
0		2	2	2

vagy másként, mivel a helyettesítendő érték 0, így a helyettesítési érték az f polinom konstans tagja, azaz 2.

11.d.ii. $R = \mathbf{Z}_5$; másként írva $f = 3x^5 + 2x^2 + 3x + 2$, $g = x + 2$ (de az eredeti alakokkal is ugyanazt az eredményt kapjuk)

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
(& 3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 &) & : & (& 1 & 2 &) & = & 3 & 4 & 2 & 3 & 2 \\
 & & 4 & 0 & 2 & 3 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 2 & 2 & 3 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 3 & 3 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 2 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 3 & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

tehát $q = 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 2$, és $r = 3$.

u	3	0	0	2	3	2	$f(u)$
3		3	4	2	3	2	3

11.d.iii. $R = \mathbf{Z}_6$, így $f = 3x^5 + 2x^2 + 5x + 2$, $g = x + 3$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
(& 3 & 0 & 0 & 2 & 5 & 2 &) & : & (& 1 & 3 &) & = & 3 & 3 & 3 & 5 & 2 \\
 & & 3 & 0 & 2 & 5 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 3 & 2 & 5 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 5 & 5 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 2 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

tehát $q = 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 5x + 2$, és $r = 2$.

u	3	0	0	2	5	2	$f(u)$
3		3	3	3	5	2	2

11.e. $f = x - 2$, $g = x - 5$, $R = \mathbf{Z}_6$; másként $f = x + 4$, $g = x + 1$,

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& 1 & 4 &) & : & (& 1 & 1 &) & = & 1 \\ & & 3 & & & & & & & & \end{array}$$

tehát $q = 1$, és $r = 3$.

u	1	4	$f(u)$
5		1	3

11.f. $f = x^2 - x + 1$, $R = \mathbf{C}$;

11.f.i. $g = x + 1$;

$$\begin{array}{cccccccccccc} (& 1 & -1 & 1 &) & : & (& 1 & 1 &) & = & 1 \quad -2 \\ & & -2 & 1 & & & & & & & & \\ & & & 3 & & & & & & & & \end{array}$$

tehát $q = x - 2$, és $r = 3$.

11.f.ii. $g = x - \left(-1/2 + i\sqrt{3}/2\right)$;

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& 1 & -1 & 1 &) & : & (& 1 & -\left(-1/2 + i\sqrt{3}/2\right) &) & = \\ & & & & & & & 1 & -3/2 + i\sqrt{3}/2 & & \\ & & -3/2 + i\sqrt{3}/2 & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 - i\sqrt{3} & & & & & & & \end{array}$$

$q = x + \left(-3/2 + i\sqrt{3}/2\right)$, és $r = 1 - i\sqrt{3}$.

11.f.iii. $g = x - \left(1/2 + i\sqrt{3}/2\right)$;

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& 1 & -1 & 1 &) & : & (& 1 & -\left(1/2 + i\sqrt{3}/2\right) &) & = \\ & & & & & & & 1 & -1/2 + i\sqrt{3}/2 & & \\ & & -1/2 + i\sqrt{3}/2 & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & \end{array}$$

$q = x + \left(-1/2 + i\sqrt{3}/2\right)$, és $r = 0$, azaz g osztója f-nek

u	1	-1	1	$f(u)$
-1		1	-2	3
$-1/2 + i\sqrt{3}/2$		1	$-3/2 + i\sqrt{3}/2$	$1 - i\sqrt{3}$
$1/2 + i\sqrt{3}/2$		1	$-1/2 + i\sqrt{3}/2$	0

11.g. $f = x^3 - 1$, $g = x - \left(-1/2 + i\sqrt{3}/2\right)$, $R = \mathbf{C}$;

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(& 1 & 0 & 0 & -1 &) & : & (& 1 & \left(1-i\sqrt{3}\right)/2 &) & = \\
 & & & & & & 1 & & -\left(1-i\sqrt{3}\right)/2 & -\left(1+i\sqrt{3}\right)/2 \\
 & & -\left(1-i\sqrt{3}\right)/2 & 0 & -1 & & & & & \\
 & & & -\left(1+i\sqrt{3}\right)/2 & -1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}
$$

$q = x^2 + \left(-1/2 + i\sqrt{3}/2\right)x - \left(1/2 + i\sqrt{3}/2\right)$, és $r = 0$, azaz g osztója f-nek

$$
\begin{array}{c||cccc|c}
u & 1 & 0 & 0 & -1 & f(u) \\
\hline
-1/2 + i\sqrt{3}/2 & & 1 & -1/2 + i\sqrt{3}/2 & -1/2 - i\sqrt{3}/2 & 0
\end{array}
$$

11.h. $f = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $g = x - \left(1/2 + i\sqrt{3}/2\right)$, $R = \mathbf{C}$;

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(& 1 & -2 & 2 & -1 &) & : & (& 1 & -\left(1+i\sqrt{3}\right)/2 &) & = \\
 & & & & & & 1 & & -\left(3-i\sqrt{3}\right)/2 & \left(1-i\sqrt{3}\right)/2 \\
 & & -\left(3-i\sqrt{3}\right)/2 & 2 & -1 & & & & & \\
 & & & \left(1-i\sqrt{3}\right)/2 & -1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}
$$

$q = x^2 + \left(-3/2 + i\sqrt{3}/2\right)x + \left(1/2 - i\sqrt{3}/2\right)$, és $r = 0$, azaz g osztója f-nek

$$
\begin{array}{c||cccc|c}
u & 1 & -2 & 2 & -1 & f(u) \\
\hline
1/2 + i\sqrt{3}/2 & & 1 & -3/2 + i\sqrt{3}/2 & 1/2 - i\sqrt{3}/2 & 0
\end{array}
$$

11.i.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
(& 2/3 & 0 & -5/4 & 1/5 &) & : & (& 1 & -2/5 &) & = \\
 & & & & & & & & 2/3 & 4/15 & -343/300 & \\
 & & 4/15 & -5/4 & 1/5 & & & & & & & \\
 & & & -343/300 & 1/5 & & & & & & & \\
 & & & & -193/750 & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c||cccc|c}
u & 2/3 & 0 & -5/4 & 1/5 & f(u) \\
\hline
2/5 & & 2/3 & 4/15 & -343/300 & -193/750
\end{array}
$$

tehát $q = 2/3x^2 + 4/15x - 343/300$, és $r = -193/750$.

4.1.11. Derivált helyettesítési értéke

12. Ha a Horner-sémával számolva a helyettesítési értéket, a kapott hányadospolinomba ismét behelyettesítjük ugyanazt az értéket, majd ezt folytatjuk, akkor a $k+1$-edik lépésben kapott helyettesítési érték az eredeti polinom k-adik deriváltjának az adott pontban vett értéke, szorozva $k!$-sal, így a derivált helyettesítési értékét egymás utáni behelyettesítésekkel és egy osztással kapjuk.

12.a. $f' = 15x^4 + 4x - 7,\ f'(3) = 1220$

k	u	3	0	0	2	-7	2	$\frac{1}{k!}f^{(k)}(u)$	$f^{(k)}(u)$
0	3		3	9	27	83	242	728	728
1	3			3	18	81	326	1220	1220

12.b. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2 = 3x^5 + 2x^2 + x + 2,\ f" = 0,\ f"(3) = 0$

k	u	3	0	0	2	1	2	$\frac{1}{k!}f^{(k)}(u)$	$f^{(k)}(u)$
0	3		3	1	3	3	2	2	2
1	3			3	2	1	2	0	0
2	3				3	3	2	0	0

12.c. $f = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2 = 2x^2 + 2x + 2,\ u = 0,\ f^{'''} = 0,\ f'''(3) = 0$

k	u	2	2	2	$\frac{1}{k!}f^{(k)}(u)$	$f^{(k)}(u)$
0	0		2	2	2	2
1	0			2	2	2
2	0			0	2	1
3	0			0	0	0

12.d. $f^{(4)} = 360x,\ f^{(4)}(-2) = -720$

k	u	3	0	-7	0	5	-8	$\frac{1}{k!}f^{(k)}(u)$	$f^{(k)}(u)$
0	-2		3	-6	5	-10	25	-58	-58
1	-2			3	-12	29	-68	161	161
2	-2				3	-18	65	-198	-396
3	-2					3	-24	113	678
4	-2						3	-30	-720

12.e. $f = 5x^6 - 11x^5 + 6x^4 + 2x^2 - 31x + 17 = x^6 + x^5 + x + 1,\ u = 1,\ f' = x^4 + 1 = (x+1)^4,\ f^{(4)} = 0,\ f^{(4)}(1) = 0;$

k	u	1	1	0	0	0	1	1	$\frac{1}{k!}f^{(k)}(u)$	$f^{(k)}(u)$
0	1		1	0	0	0	0	1	0	0
1	1			1	1	1	1	1	0	0
2	1				1	0	1	0	1	0
3	1					1	1	0	0	0
4	1						1	0	0	0

4.1.12. Polinomfüggvények véges testek felett

13. Legyen f egy R gyűrű fölötti polinom, ekkor $u \longmapsto f(u)$, ahol $u \in R$, R-nek önmagába való leképezése, vagyis egy függvény. Ez a leképezés az f polinomhoz tartozó polinomfüggvény. Az nyilvánvaló, hogy ha g is egy R fölötti polinom, és $f = g$, akkor a két polinomhoz tartozó polinomfüggvény azonos, de éppen a következő példák mutatják, hogy ez visszafelé általában nem igaz (emlékeztetünk rá, hogy két polinom akkor és csak akkor egyenlő, ha valamennyi együtthatójuk azonos, míg két függvény pontosan akkor egyenlő, ha az értelmezési tartomány minden pontjához azonos függvényérték tartozik).

13.a. Tetszőleges u egész szám esetén $u^p \equiv u \pmod{p}$, tehát $\mathbf{Z}_p$-ben $\overline{u}^p = \overline{u}$, így az x és az x^p polinomokhoz tartozó polinomfüggvényekmhelyettesítési értéke minden pontban azonos, tehát a két függvény is azonos, jóllehet a két polinom különböző.

13.b. $0^q = 0$, és ha $u \neq 0$, akkor $u^{q-1} = e$, hiszen q-elemű test multiplikatív csoportjának rendje $q-1$, így $u^q = u$ a test minden eleére, tehát a két polinomfüggvény azonos.

13.c. **13.a.** alapján az $x^p - x$-hez tartozó polinomfüggvény a nullfüggvény, és test fölötti polinomok összegéhez és szorzatához tartozó polinomfüggvény a polinomok által meghatározott polinomfüggvények összege illetve szorzata.

13.d. Hasonló az előző feladathoz.

13.e. Ha $f = g\cdot(x^p - x)+r$, ahol r legfeljebb $p-1$-edfokú, akkor az előbbi pontok alapján f-hez és r-hez azonos polinomfüggvény tartozik. Ha viszont két legfeljebb $p-1$-edfokú, $\mathbf{Z}_p$ fölötti polinom ugyanazt a polinomfüggvényt határozza meg, akkor $\mathbf{Z}_p$ minden pontjában, tehát p különböző helyen azonos a polinomfüggvények értéke, így a két polinom is azonos. Ebből következik, hogy a különböző polinomfüggvények és a legfeljebb $p-1$-edfokú polinomok között bijekció létesíthető. Az ilyen polinomok száma viszont éppen p^p.

13.f. Ugyanúgy látható be, mint az előző állítás.

13.g. Éppen ezzel láttuk be **13.e.**-t.

13.h. Lényegében véve azonos az előző feladattal.

13.i. $x^p - x$-nek $\mathbf{Z}_p$ minden eleme gyöke, így, ha $f = g\cdot(x^p - x) + r$, akkor f és r értéke $\mathbf{Z}_p$ minden pontjában azonos, tehát a $\mathbf{Z}_p$-beli gyökei is megegyeznek, és

$r = f \mod (x^p - x)$.

13.j. A bizonyítás megegyezik az előző pont bizonyításával, az értelemszerű átalakítások után.

13.k. Ha $f = g \cdot \left(x^{p-1} - \overline{1}\right) + s$, és $\overline{k} \neq \overline{0}$, akkor $f\left(\overline{k}\right) = s\left(\overline{k}\right)$, mert

$$\overline{k} \neq \overline{0} \Longrightarrow p \nmid k \Longrightarrow k^{p-1} \equiv 1 \mod p \Longrightarrow \overline{k}^{p-1} - \overline{1} = \overline{0}$$

vagyis $x^{p-1} - \overline{1}$-nek $\mathbf{Z}_p$ minden nem nulla eleme gyöke, így a nem nulla pontokban f és s értéke azonos.

13.l. Mint **13.k.**.

13.m. $f\left(\overline{u}\right) = \sum_{i=0}^n a_i \overline{u}^i$. Ha $\overline{0} \neq \overline{u} \in \mathbf{Z}_p$, akkor $\overline{u}^{p-1} = \overline{1}$, és innen indukcióval azt kapjuk, hogy

$$\overline{u}^k = \overline{u}^{\left\lfloor \frac{k}{p-1} \right\rfloor (p-1) + (k \mod p-1)} = \left(\overline{u}^{p-1}\right)^{\left\lfloor \frac{k}{p-1} \right\rfloor} \overline{u}^{(k \mod p-1)} = \overline{u}^{(k \mod p-1)}$$

tehát $f\left(\overline{u}\right) = \sum_{i=0}^n a_i \overline{u}^{(i \mod p-1)}$.

13.n. A bizonyítás hasonló az előbbi feladat bizonyításához.

13.o. $d | x^p - x = \prod_{\overline{u} \in \mathbf{Z}_p} \left(x - \overline{u}\right)$-ból következik, hogy d minden gyöke egyszeres és $\mathbf{Z}_p$-beli. $d|f$-ből $f = gd$, így, ha $\overline{u}$ gyöke d-nek, akkor gyöke f-nek is. Fordítva, legyen $\overline{u}$ egy $\mathbf{Z}_p$-beli.gyöke f-nek. Mivel test fölötti polinomgyűrű euklideszi, ezért $d = s \cdot f + t \cdot (x^p - x)$ valamilyen $\mathbf{Z}_p$ fölötti s és t polinomokkal. Ekkor $d\left(\overline{u}\right) = s\left(\overline{u}\right) f\left(\overline{u}\right) + t\left(\overline{u}\right) \cdot \left(\overline{u}^p - \overline{u}\right) = \overline{0}$, tehát $\overline{u}$ d-nek is gyöke.

13.p. Ugyanúgy bizonyítható, mint **13.o.**.

13.q. $x^{p-1} - \overline{1} = \prod_{\overline{0} \neq \overline{u} \in \mathbf{Z}_p} \left(x - \overline{u}\right)$, és ezt figyelembe véve a bizonyítás ugyanaz, mint **13.o.**-ban.

13.r. K-ban hasonló igaz $x^{q-1} - e$-re, mint az előző pontban $x^{p-1} - \overline{1}$-re.

4.1.13. Polinom deriváltja

14.

14.a. $\left(3x^7 - 5x^2 + 2x + 7\right)' = 21x^6 - 10x + 2$.

14.b. $f = 3x^7 - 5x^2 + 2x + 7 = x^2 + 2x + 1$, $\left(x^2 + 2x + 1\right)' = 2x + 2$.

14.c. $f = 3x^7 - 5x^2 + 2x + 7 = 3x^7 + 2x^2 + 2x$, $\left(3x^7 + 2x^2 + 2x\right)' = 4x + 2$.

14.d. $\mathbf{Z} \leq \mathbf{Q}$, így a feladat azonos a **14.a.** feladattal.

14.e. $\left((x-3)^m\right)' = m\,(x-3)^{m-1}$. Ha m osztható a gyűrű karakterisztikájával, akkor a derivált a nullpolinom.

14.f. $(x-3)^m = x^m$, és a derivált mx^{m-1}. Ha m osztható a gyűrű karakterisztikájával, akkor a derivált a nullpolinom.

14.g. $\left(\sum_{i=0}^n a_i x^{pi}\right)' = p \sum_{i=1}^n i a_i x^{pi-1} = 0$.

14.h. $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)' = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} a_{2j+1} x^{2j} = \left(\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} b_{2j+1} x^j\right)^2$

15.

15.a. Igen: ha a gyűrű karakterisztikája $m > 0$, akkor például $(x^m)' = mx^{m-1} = 0$.

15.b. Igen: ha a gyűrű karakterisztikája $m > 0$, akkor $\left(x^m + x^{m-1}\right)' = -x^{m-2}$.

4.1.14. Legnagyobb közös osztó és lineáris kombinációs előállítása

16. Test fölötti polinomgyűrű euklideszi, így a legnagyobb közös osztó meghatározható az euklideszi algoritmussal. Legyen u és v a két elem, amelynek meg akarjuk határozni a legnagyobb közös osztóját. Az $r_{-1} = u$, $r_0 = v$ jelöléssel az algoritmus a következő: ha már ismerjük valamilyen $i \in \mathbf{N}_0$-ra r_{i-1} és r_i értékét, és $r_i \neq 0$, akkor legyen $r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1}$, ahol vagy $r_{i+1} = 0$, vagy $r_{i+1} \neq 0$ és $\varphi(r_{i+1}) < \varphi(r_i)$ (itt φ az euklideszi norma, ami polinomok esetén a nem nulla polinom foka). Mivel φ értéke nem negatív egész, ezért véges sok lépés után a maradék biztosan 0 lesz. Ha egy $n \in \mathbf{N}_0$-ra $r_n \neq 0$, de $r_{n+1} = 0$, akkor u és v legnagyobb közös osztója r_n (feltehetjük, hogy $v = r_0 \neq 0$, mert ellenkező esetben $(u, v) = u$ közvetlenül ismert).

Euklideszi gyűrűben (és még más, az euklideszi gyűrűnél általánosabb gyűrűkben, de nem minden gyűrűben) a legnagyobb közös osztó felírható az adott két elem lineáris kombinációjaként, ahol a lineáris kombináció együtthatói a gyűrűből vannak. Ennél több is igaz, ugyanis ha r_n a legnagyobb közös osztó, akkor minden $-1 \leq k \leq n$ indexre van a gyűrűben olyan a_k és b_k elem, amellyel $r_k = a_k u + b_k v$, és ilyen együtthatók a kiterjesztett euklideszi algoritmussal szintén meghatározhatóak. Az könnyen látható, hogy $a_{-1} = e$ és $b_{-1} = 0$ választással $r_{-1} = a_{-1}u + b_{-1}v$, és ha $a_0 = 0$ és $b_0 = e$, akkor $r_0 = a_0 u + b_0 v$. Ebből kiindulva pedig rekurzióval kapjuk, hogy ha már ismert a_{k-1} és a_k valamint b_{k-1} és b_k értéke, akkor $a_{k+1} = a_{k-1} - q_k a_k$ és $b_{k+1} = b_{k-1} - q_k b_k$ olyan, hogy $r_{k+1} = a_{k+1}u + b_{k+1}v$ (fontos megjegyezni, hogy nem csak ezzel az a_{k+1}, b_{k+1} párral teljesül az egyenlőség).

16.a.

(	3	0	-2	5	3	)	:	(	2	0	-2	-3	) =
											3/2	0	
			1	19/2	3								
	(	2	0	-2	-3	)	:	(	1	19/2	3	)	=
											2	-19	
			-19	-8	-3								
				345/2	54								
		(	1	19/2	3	)	:	(	345/2	54	)		=
											2/345	2113/39675	
				2113/230	3								
					1641/13225								

Ha a maradék konstans, akkor megállhatunk. Amennyiben ez a konstans 0, akkor a legnagyobb közös osztó az utolsó osztó, ellenkező esetben a legnagyobb közös osztó a kapott nem nulla konstans osztási maradék. A legnagyobb közös osztó csak egy egységszorzó erejéig egyértelmű, vagyis egységgel szorozható. Test fölötti polinomgyűrűben a nem nulla konstans polinomok az egységek, így az előbbi két polinom legnagyobb közös osztója az 1 (azaz a két polinom relatív prím).

k	q_{k-1}	a_k	b_k
-1		1	0
0		0	1
1	$3/2x$	$1-0\cdot 3/2x$ $=1$	$0-1\cdot 3/2x$ $=-3/2x$
2	$2x-19$	$0-(2x-19)\cdot 1$ $=-2x+19$	$1-(2x-19)\cdot(-3/2x)$ $=3x^2-57/2x+1$
3	$2/345x+$ $2113/39675$	$1-(2/345x+2113/39675)$ $\times(-2x+19)$ $=4/345x^2-$ $48/13225x-472/39675$	$-3/2x-(2/345x+2113/39675)$ $\times\big(3x^2-57/2x+1\big)$ $=-2/115x^3+72/13225x^2+$ $478/39675x-2113/39675$

és

$$\begin{aligned}1641/13225 &= \big(4/345x^2-48/13225x-472/39675\big)\,f\\ &\quad+\big(4/345x^2-48/13225x-472/39675\big)\,g\end{aligned}$$

16.b. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3 = 3x^4 + 5x^2 + 5x + 3$, $g = 2x^3 - 2x - 3 = 2x^3 + 5x + 4$, $R = \mathbf{Z}_7$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
(& 3 & 0 & 5 & 5 & 3 &) & : & (& 2 & 0 & 5 & 4 &) & = & 5 & 0 \\
 & & & 1 & 6 & 3 & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 2 & 0 & 5 & 4 &) & : & (& 1 & 6 & 3 &) & = & 2 \quad 2 \\
 & & 2 & 6 & 4 & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 5 & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(& 1 & 6 & 3 &) & : & (& 1 & 5 &) & = & 1 \quad 1 \\
 & & 1 & 3 & & & & & & & & \\
 & & & 5 & & & & & & & &
\end{array}$$

tehát a legnagyobb közös osztó $d = 5$, azaz $d = 1$.

$$\begin{array}{ccc}
 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 \\
q_0 = 5x & 1 & 2x \\
q_1 = 2x + 2 & 5x + 5 & 3x^2 + 3x + 1 \\
q2 = x + 1 & 2x^2 + 4x + 3 & 4x^3 + x^2 + 5x + 6
\end{array}$$

és $\left(2x^2 + 4x + 3\right)\left(3x^4 + 5x^2 + 5x + 3\right) + \left(4x^3 + x^2 + 5x + 6\right)\left(2x^3 + 5x + 4\right) = 5$, vagy $\left(6x^2 + 5x + 2\right)\left(3x^4 + 5x^2 + 5x + 3\right) + \left(5x^3 + 3x^2 + x + 4\right)\left(2x^3 + 5x + 4\right) = 1$

16.c. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3 = 3x^4 + 9x^2 + 5x + 3$, $g = 2x^3 - 2x - 3 = 2x^3 + 9x + 8$, $R = \mathbf{Z}_{11}$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
(& 3 & 0 & 9 & 5 & 3 &) & : & (& 2 & 0 & 9 & 8 &) & = & 7 & 0 \\
 & & & 1 & 4 & 3 & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 2 & 0 & 9 & 8 &) & : & (& 1 & 4 & 3 &) & = & 2 \quad 3 \\
 & & 3 & 3 & 8 & & & & & & & & & \\
 & & & 2 & 10 & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(& 1 & 4 & 3 &) & : & (& 2 & 10 &) & = & 6 \quad 5 \\
 & & 10 & 3 & & & & & & & & \\
 & & & 8 & & & & & & & &
\end{array}$$

tehát a legnagyobb közös osztó $d = 8$, azaz $d = 1$.

	1	0
	0	1
$q_0 = 7x$	1	$4x$
$q_1 = 2x+3$	$9x+8$	$3x^2+10x+1$
$q2 = 6x+5$	x^2+6x+5	$4x^3+2x^2+3x+6$

és $\left(x^2+6x+5\right)\left(3x^4+9x^2+5x+3\right)+\left(4x^3+2x^2+3x+6\right)\left(2x^3+9x+8\right)=8$, vagy $\left(7x^2+9x+2\right)\left(3x^4+9x^2+5x+3\right)+\left(6x^3+3x^2+10x+9\right)\left(2x^3+9x+8\right)=1$

16.d. $f = 3x^4-2x^2+5x+3 = 3x^4+3x^2+3$, $g = 2x^3-2x-3 = 2x^3+3x+2$, $R = \mathbf{Z}_5$

(	3	0	3	0	3	)	:	(	2	0	3	2	)	=	4	0
			1	2	3											

(	2	0	3	2	)	:	(	1	2	3	)	=	2	1
		1	2	2										
				4										

tehát a legnagyobb közös osztó $d = 4$, azaz $d = 1$.

	1	0
	0	1
$q_0 = 4x$	1	x
$q_1 = 2x+1$	$3x+4$	$3x^2+4x+1$

és $(3x+4)\left(3x^4+3x^2+3\right)+\left(3x^2+4x+1\right)\left(2x^3+3x+2\right)=4$, vagy
$(2x+1)\left(3x^4+3x^2+3\right)+\left(2x^2+x+4\right)\left(2x^3+3x+2\right)=1$

16.e. $f = 3x^4-2x^2+5x+3 = x^4+x+1$, $g = 2x^3-2x-3 = 1$, $R = \mathbf{Z}_2$

Most a legnagyobb közös osztó $d = 1 = g$, és $0\cdot\left(x^4+x+1\right)+1\cdot 1 = 1$. Egyébként a legnagyobb közös osztó nyilvánvalóan 1, hiszen egységnek és egy tetszőleges elemnek a legnagyobb közös osztója mindig 1 (illetve a gyűrű egységeleme).

16.f. $f = 3x^4-2x^2+5x+3 = x^2+2x+1$, $g = 2x^3-2x-3 = 2x^3+x$, $R = \mathbf{Z}_3$

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 2 & 0 & 1 & 0 &) & : & (& 1 & 2 & 1 &) & = & 2 \quad 2 \\
 & & 2 & 2 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(& 1 & 2 & 1 &) & : & (& 1 & 1 &) & = \quad 1 \quad 1 \\
 & & 1 & 1 & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & & & &
\end{array}
$$

a legnagyobb közös osztó $d = x + 1$.

$$
\begin{array}{rcc}
 & 0 & 1 \\
 & 1 & 0 \\
q_0 = 2x + 2 & x + 1 & 1
\end{array}
$$

és $(x + 1)\left(x^2 + 2x + 1\right) + 1 \cdot \left(2x^3 + x\right) = x + 1$

16.g.

$$
\begin{array}{ccccccc}
(& 3 - i & -1 - 3i & -2 + 4i & 5 - 5i & -7 - i &) : \\
 & (& 4 - 3i & -5 & 3 - i & -3 + i &) = \\
 & & & & (3 + i)/5 & (14 - 2i)/25 & \\
 & & 2 - 2i & -4 + 4i & 7 - 5i & -7 - i & \\
 & & & -(6 - 18i)/5 & (27 - 21i)/5 & -(27 + 9i)/5 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
(& 4 - 3i & -5 & 3 - i & -3 + i &) : \\
 & (& -(6 - 18i)/5 & (27 - 21i)/5 & -(27 + 9i)/5 &) = \\
 & & & -(13 + 9i)/12 & -(11 + 23i)/24 & \\
 & & 4 - 1/2i & -3/2 - 7i & -3 + i & \\
 & & & 5 - 15/4i & -15/4 - 5i &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
(& -(6 - 18i)/5 & (27 - 21i)/5 & -(27 + 9i)/5 &) : \\
 & (& 5 - 15/4i & -15/4 - 5i &) = \\
 & & -(312 - 216i)/625 & (468 - 324i)/625 & \\
 & & (9 - 27i)/5 & -(27 + 9i)/5 & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

a legnagyobb közös osztó $d = (5 - 15/4i)\, x - (15/4 + 5i)$, illetve normálva $d = x - i$

	1	0
	0	1
$q_0 = (3/5 + 1/5i)\,x$ $+ (14/25i - 2/25i)$	1	$-(3/5 + 1/5i)\,x$ $-(14/25i - 2/25i)$
$q_1 = -(13/12 + 3/4i)\,x$ $-(11/24 + 23/24i)$	$(13/12 + 3/4i)\,x$ $+ (11/24 + 23/24i)$	$-(1/2 + 2/3i)\,x^2$ $-(3/4 + i)\,x + (2/3 - 1/2i)$

és

$$\begin{gathered}
((13/12 + 3/4i)\,x + (11/24 + 23/24i)) \times \\
\big((3-i)x^4 - (1+3i)x^3 + (-2+4i)x^2 + (5-5i)x - (7+i)\big) \\
+ \big(-(1/2 + 2/3i)\,x^2 - (3/4 + i)\,x + (2/3 - 1/2i)\big) \times \\
\big((4-3i)x^3 - 5x^2 + (3-i)x - (3-i)\big) \\
= (5 - 15/4i)\,x - (15/4 + 5i)
\end{gathered}$$

16.h.

$$\begin{array}{cccccccc}
(& 1/2 & -3/2 & 25/9 & -26/9 & -4/3 &) & : \\
 & (& 2 & -19/3 & 11/3 & 2 &) & = \\
 & & & & 1/4 & 1/24 & & \\
 & & 1/12 & 67/36 & -61/18 & -4/3 & & \\
 & & & 17/8 & -85/24 & -17/12 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & (& 2 & -19/3 & 11/3 & 2 &) & : & & \\
 & & (& 17/8 & -85/24 & -17/12 &) & = & & \\
 & & & & & & & & 16/17 & -24/17 \\
 & & & -3 & 5 & 2 & & & & \\
 & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

a legnagyobb közös osztó $d = 17/8x^2 - 85/24x - 17/12$, illetve normálva $d = x^2 - 5/3x - 2/3$

	1	0
	0	1
$q_0 = 1/4x + 1/24$	1	$-(1/4x + 1/24)$

és

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \left(1/2x^4 - 3/2x^3 + 25/9x^2 - 26/9x - 4/3\right) \\ & - (1/4x + 1/24)\left(2x^3 - 19/3x^2 + 11/3x + 2\right) \\ & = 17/8x^2 - 85/24x - 17/12 \end{aligned}$$

16.i. $f = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 3 = 3x^4 + 3x^2 + 3$, $g = 4x^3 + 25x^2 - 15x - 9 = 4x^3 + 1$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} (& 3 & 0 & 3 & 0 & 3 &) & : & (& 4 & 0 & 0 & 1 &) & = & 2 \quad 0 \\ & & & 3 & 3 & 3 & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} (& 4 & 0 & 0 & 1 &) & : & (& 3 & 3 & 3 &) & = & 3 \quad 2 \\ & & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & & & & \end{array}$$

a legnagyobb közös osztó $d = 3x^2 + 3x + 3$, illetve normálva $d = x^2 + x + 1$.

$$\begin{array}{rcc} & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ q_0 = 2x & 1 & 3x \end{array}$$

és $1 \cdot \left(3x^4 + 3x^2 + 3\right) + 3x \cdot \left(4x^3 + 1\right) = 3x^2 + 3x + 3$.

16.j. $f = 4x^4 - 12x^3 - 3x^2 + 18x + 9 = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 4$,
$g = 2x^2 - 3x - 3 = 2x^2 + 2x + 2$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} (& 4 & 3 & 2 & 3 & 4 &) & : & (& 2 & 2 & 2 &) & = & 2 \quad 2 \quad 2 \\ & & 4 & 3 & 3 & 4 & & & & & & & & \\ & & & 4 & 4 & 4 & & & & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & & & & & \end{array}$$

a legnagyobb közös osztó $d = 2x^2 + 2x + 2$, illetve normálva $d = x^2 + x + 1$.

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

és $0 \cdot \left(4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 4\right) + 1 \cdot \left(2x^2 + 2x + 2\right) = 2x^2 + 2x + 2$.

16.k. $f = -4x^4 + 9x^3 + 4x^2 - 20x + 16 = 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 2$,
$g = -14x^5 + 10x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 12x - 8 = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 6$,

(	3	2	4	1	2	)	:	(	3	2	1	5	6	)	=	1
			3	3	3											

(	3	2	1	5	6	)	:	(	3	3	3	)		=	1	2	2
		6	5	5	6												
			6	6	6												
					0												

a legnagyobb közös osztó $d = 3x^2 + 3x + 3$, illetve normálva $d = x^2 + x + 1$.

	1	0
	0	1
$q_0 = 1$	1	6

és $1 \cdot \left(3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 2\right) + 6 \cdot \left(3x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 6\right) = 3x^2 + 3x + 3$.

16.l. $f = 5x^5 - 10x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 10x - 3$, $g = 4x^4 + 3x^3 - 4x - 3$,

(	5	−10	3	−5	10	−3	)	:		
	(	4	3	0	−4	−3	)	=	5/4	−55/16
		−55/4	3	0	55/4	−3				
			213/16	0	0	−213/16				

(	4	3	0	−4	−3	)	:		
	(	213/16	0	0	−213/16	)	=	64/213	16/71
		3	0	0	−3				
					0				

a legnagyobb közös osztó $d = 213/16x^3 - 213/16$, illetve normálva $d = x^3 - 1$.

	1	0
	0	1
$q_0 = 5/4x - 55/16$	1	$-5/4x + 55/16$

és

$$\begin{aligned} &1 \cdot \left(5x^5 - 10x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 10x - 3\right) \\ &+ (-5/4x + 55/16)\left(4x^4 + 3x^3 - 4x - 3\right) \\ &= 213/16x^3 - 213/16 \end{aligned}$$

16.m. $f = 5x^5 - 10x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 3x^3 + 2$, $g = 4x^4 + 3x^3 - 4x - 3 = 4x^4 + 3x^3 + x + 2$,

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
(& 4 & 3 & 0 & 1 & 2 &) & : & (& 3 & 0 & 0 & 2 &) & = & 3 & 1 \\
 & & 3 & 0 & 0 & 2 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

a legnagyobb közös osztó $d = 3x^3 + 2$, illetve normálva $d = x^3 + 4$.

$$\begin{array}{cc}
0 & 1 \\
1 & 0
\end{array}$$

és $1 \cdot \left(3x^3 + 2\right) + 0 \cdot \left(4x^4 + 3x^3 + x + 2\right) = 3x^3 + 2$.

16.n. $f = 5x^5 - 10x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, $g = 4x^4 + 3x^3 - 4x - 3 = 4x^4 + 3x^3 + 3x + 4$,

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
(& 5 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 &) & : & (& 4 & 3 & 0 & 3 & 4 &) & = & 3 & 4 \\
 & & 2 & 3 & 0 & 5 & 4 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 5 & 0 & 0 & 2 & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
(& 4 & 3 & 0 & 3 & 4 &) & : & (& 5 & 0 & 0 & 2 &) & = & 5 & 2 \\
 & & 3 & 0 & 0 & 4 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

a legnagyobb közös osztó $d = 5x^3 + 2$, illetve normálva $d = x^3 + 6$.

$$\begin{array}{rcc}
 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 \\
q_0 = 3x + 4 & 1 & 4x + 3
\end{array}$$

és $1 \cdot \left(5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 4\right) + (4x + 3)\left(4x^4 + 3x^3 + 3x + 4\right) = 5x^3 + 2$.

16.o. $f = 5x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 20x^3 - x^2 - 10x + 3$, $g = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4x + 3$,

(	5	-10	-7	20	-1	-10	3	)	:		
	(	4	3	-8	-6	4	3	)	=	$5/4$	$-55/16$
		$-55/4$	3	$55/2$	-6	$-55/4$	3				
			$213/16$	0	$-213/8$	0	$213/16$				

(	4	3	-8	-6	4	3	)	:		
	(	$213/16$	0	$-213/8$	0	$213/16$	)	=	$64/213$	$16/71$
		3	0	-6		3				
						0				

a legnagyobb közös osztó $d = 213/16x^4 - 213/8x^2 + 213/16$, illetve normálva $d = x^4 - 2x^2 + 1$.

	1	0
	0	1
$q_0 = 5/4x - 55/16$	1	$-5/4x + 55/16$

és

$$\begin{aligned} &1 \cdot \left(5x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 20x^3 - x^2 - 10x + 3\right) \\ &+ (-5/4x + 55/16)\left(4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4x + 3\right) \\ &= 213/16x^4 - 213/8x^2 + 213/16 \end{aligned}$$

16.p. $f = 5x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 20x^3 - x^2 - 10x + 3 = 3x^4 + 4x^2 + 3$,
$g = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4x + 3 = 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 3$,

(	4	3	2	4	4	3	)	:	(	3	0	4	0	3	)	=	3	1
		3	0	4	0	3												
						0												

a legnagyobb közös osztó $d = 3x^4 + 4x^2 + 3$, illetve normálva $d = x^4 + 3x^2 + 1$.

0	1
1	0

és $1 \cdot \left(3x^4 + 4x^2 + 3\right) + 0 \cdot \left(4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 3\right) = 33x^4 + 4x^2 + 3$.

16.q. $f = 5x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 20x^3 - x^2 - 10x + 3 = 5x^6 + 4x^5 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 3$,
$g = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4x + 3 = 4x^5 + 3x^4 + 6x^3 + x^2 + 4x + 3$,

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
(& 5 & 4 & 0 & 6 & 6 & 4 & 3 &) & : & (& 4 & 3 & 6 & 1 & 4 & 3 &) & = & 3 & 4 \\
 & & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 5 & 0 & 4 & 0 & 5 & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
(& 4 & 3 & 6 & 1 & 4 & 3 &) & : & (& 5 & 0 & 4 & 0 & 5 &) & & = & 5 & 2 \\
 & & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

a legnagyobb közös osztó $d = 5x^4 + 4x^2 + 5$, illetve normálva $d = x^2 + 5x^2 + 1$.

$$\begin{array}{ccc}
 & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 \\
q_0 = 3x+4 & 1 & 4x+3
\end{array}$$

és

$$\begin{aligned}
& 1 \cdot \left(5x^6 + 4x^5 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 3\right) \\
+ & (4x+3)\left(4x^5 + 3x^4 + 6x^3 + x^2 + 4x + 3\right) \\
& = 5x^4 + 4x^2 + 5
\end{aligned}$$

17. Két polinomnak akkor és csak akkor van közös gyöke, ha a legnagyobb közös osztójuknak van gyöke, azaz pontosan akkor, ha a legnagyobb közös osztó a nullpolinom, vagy legalább elsőfokú (a legnagyobb közös osztó akkor és csak akkor a nullpolinom, ha mindkét polinom a nullpolinom, így, ha legalább az egyik polinom nem a nullpolinom, akkor a közös gyök létezésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy a legnagyobb közös osztó legalább elsőfokú legyen). Ha van közös gyök, akkor az a legnagyobb közös osztó gyöke, és fordítva, a legnagyobb közös osztó gyöke közös gyöke a két polinomnak (de a gyökök multiplicitása a három polinomban különböző lehet). A legnagyobb közös osztó ugyanazon gyűrű fölötti polinom, mint a két megadott polinom, de a közös gyökök nem feltétlenül vannak ebben a gyűrűben.

17.a. A két polinom legnagyobb közös osztója 1, így a két polinomnak nincs közös gyöke.

17.b. $(f, g) = 1$, tehát a két polinomnak nincs közös gyöke.

17.c. f és g legnagyobb közös osztója egy nem nulla konstans polinom, ezért f-nek és g-nek nincs közös gyöke.

17.d. A két polinom legnagyobb közös osztója 1, így a két polinomnak nincs közös gyöke.

17.e. A két polinom legnagyobb közös osztója 1, így a két polinomnak nincs közös gyöke. Ez egyébként nyilvánvaló, hiszen g nem nulla konstans polinom, tehát nincs gyöke, és akkor nem lehet a két polinomnak sem közös gyöke.

17.f. A legnagyobb közös osztó $d = x + 1$, így van közös gyök. A közös gyök d gyöke, tehát $x_0 = -1$.

17.g. $d = x - i$ (a gyökök szempontjából mindegy, hogy melyik legnagyobb közös osztót tekintjük, hiszen egységgel szorozva nem változnak a polinom gyökei). A legnagyobb közös osztó elsőfokú, így van közös gyök, és ez $x_0 = i$.

17.h. $d = x^2 - 5/3x - 2/3$, van közös gyök. A másodfokú egyenlet megoldása $x_1 = 2$ és $x_2 = -1/3$, így ez a két érték a két polinom közös gyöke.

17.i. $d = x^2 + x + 1$, van közös gyök. Minden olyan test esetén, amelynek a karakterisztikája nem 2, alkalmazható a másodfokú egyenlet ismert megoldóképlete. Ekkor

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2} = 2 \pm 3\sqrt{2}$$

($\sqrt{2}$ most a $\mathbf{Z}_5$-beli, a 2-vel reprezentált maradékosztály, és nem a 2 egész szám, vagyis $\sqrt{2}$ nem egy valós szám!). $\mathbf{Z}_5$-ben nincs olyan elem, amelynek a négyzete 2, ezért $\mathbf{Z}_5$-ben nem végezhető el a kijelölt négyzetgyökvonás, a két polinom két közös gyöke nincs benne $\mathbf{Z}_5$-ben (de a két polinomnak *van* két közös gyöke, $2 \pm 3\sqrt{2}$, és van olyan, a $\mathbf{Z}_5$-öt résztestként tartalmazó test, amelynek eleme $2 \pm 3\sqrt{2}$, hasonlóan ahhoz, ahogy a racionális együtthatós $x^2 + x + 1$ polinomnak sincs racionális gyöke, de van gyöke például a valós számok testében!).

17.j. Mivel a gyűrű és d ugyanaz, mint az előző feladatban, ezért a megoldás is azonos.

17.k. A legnagyobb közös osztó ismét $d = x^2 + x + 1$, van közös gyök, de most más a test.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = 3 \pm 1$$

vagyis az egyik gyök $x_1 = 4$, a másik $x_2 = 2$.

17.l. $d = x^3 - 1$, a két polinomnak van közös gyöke. d egyik gyöke $x_0 = 1$, ez benne van az alaptestben, és a további gyökök az $x^2 + x + 1$ polinom gyökei, amelyek nincsenek benne a racionális számok testében. Az utóbbi polinom két gyöke $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17.m. $d = x^3 + 4 = x^3 - 1$, a közös gyökök egyrészt $x_0 = 1$, másrészt az $x^2 + x + 1$ polinom gyökei, amelyeket meghatároztunk **17.i.**-ben.

17.n. $d = x^3 + 6 = x^3 - 1$, a közös gyökök egyrészt $x_0 = 1$, másrészt az $x^2 + x + 1$ polinom gyökei, amelyeket **17.k.**-ban meghatároztunk: $x_1 = 4$ és $x_2 = 2$.

17.o. $d = x^4 - 2x^2 + 1$. Ez a negyedfokú egyenlet visszavezethető egy másodfokúra, ha bevezetjük $y = x^2$-et. Ekkor $x^4 - 2x^2 + 1 = y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$, vagyis $y_0 = 1$, és innen $x_{1,2} = \pm 1$, továbbá mindkét gyök legalább kétszeres gyöke az eredeti polinomoknak.

17.p. $d = x^4 + 3x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1$. Az előző ponthoz hasonlóan $x_{1,2} = \pm 1$, ebből $x_1 = 1$ és $x_2 = -1 = 4$, és mindkét gyök legalább kétszeres gyöke mind f-nek, mind g-nek.

17.q. $d = x^4 + 5x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1$. Most is $x_{1,2} = \pm 1$, így $x_1 = 1$ és $x_2 = -1 = 6$, és ez a két érték legalább kétszeres gyöke a megadott két polinomnak.

4.1.15. Többszörös gyök

18. Ha f-nek u k-szoros gyöke, ahol k egy pozitív egész szám, akkor u a polinom deriváltjának legalább $k-1$-szeres gyöke, és pontosan $k-1$-szeres gyöke, ha k nem osztható a gyűrű karakterisztikájával. Ebből következik, hogy f-nek pontosan akkor van többszörös gyöke, ha van közös gyöke a deriváltjával, és ekkor a többszörös gyökök a legnagyobb közös osztó gyökei.

18.a. $f = 2x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 26x^2 - 4x + 24 \to f' = 10x^4 + 28x^3 - 9x^2 - 52x - 4$

$$
\begin{array}{cccccccc}
(& 2 & 7 & -3 & -26 & -4 & 24 &): \\
 & (& 10 & 28 & -9 & -52 & -4 &)= \\
 & & & & & 1/5 & 7/50 & \\
 & & 7/5 & -6/5 & -78/5 & -16/5 & 24 & \\
 & & & -128/25 & -717/50 & 102/25 & -614/25 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & (& 10 & 28 & -9 & -52 & -4 &): \\
 & & (& -128/25 & -717/50 & 102/25 & -614/25 &)= \\
 & & & & & -125/64 & 25/16384 & \\
 & & & -1/128 & -33/32 & -129/32 & -4 & \\
 & & & & -33075/32768 & -33075/8192 & -33075/8192 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & (& -128/25 & -717/50 & 102/25 & -614/25 &): \\
 & & & (& -33075/32768 & -33075/8192 & -33075/8192 &)= \\
 & & & & & 4194304/826875 & -5029888/826875 & \\
 & & & & 307/50 & 614/25 & 614/25 & \\
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

a legnagyobb közös osztó $d = -33075/32768x^2 - 33075/8192x - 33075/8192$, vagy másként $d = x^2 + 4x + 4$. A legnagyobb közös osztó másodfokú, ezért van többszörös gyök. $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, ami azt jelenti, hogy egyetlen többszörös gyöke van a polinomnak, az $x_0 = -2$. Mivel a test karakterisztikája 0, és ez nyilván nem osztója a gyök multiplicitásának, továbbá a -2 kétszeres gyöke a legnagyobb közös osztónak, és így a deriváltnak, ezért az eredeti polinomnak a -2 háromszoros gyöke. Valóban,

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
(& 2 & 7 & -3 & -26 & -4 & 24 &) & : & (& 1 & 6 & 12 & 8 &) & = & 2 & -5 & 3 \\
 & & -5 & -27 & -42 & -4 & 24 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 3 & 18 & 36 & 24 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

azaz f osztható $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$-cal, és a -2 nem gyöke a hányados-polinomnak, $q = 2x^2 - 5x + 3$-nak, mert $q\,(-2) = 21$.

18.b. $f = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 \to f' = 8x^3 + 3x^2 - 16 - 1$

$$
\begin{array}{cccccccc}
(& 2 & 1 & -8 & -1 & 6 &) & : \\
 & (& 8 & 3 & -16 & -1 &) & = \\
 & & & & 1/4 & 1/32 & & \\
 & & 1/4 & -4 & -3/4 & 6 & & \\
 & & & -131/32 & -1/4 & 193/32 & & \\
 & & & & & & & \\
 & (& 8 & 3 & -16 & -1 &) & : \\
 & & (& -131/32 & -1/4 & 193/32 &) & = \\
 & & & & -256/131 & 10528/17161 & & \\
 & & & 329/131 & -552/131 & -1 & & \\
 & & & & -74944/17161 & 46336/17161 & & \\
 & & & & & & & \\
 & & (& -131/32 & -1/4 & 193/32 &) & : \\
 & & & (& -74944/17161 & 46336/17161 &) & = \\
 & & & & 2248091/2398208 & 447095533/702075392 & & \\
 & & & & -26053/9368 & 193/32 & & \\
 & & & & & 189200025/43879712 & &
\end{array}
$$

vagyis a legnagyobb közös osztó nem nulla konstans polinom, f-nek nincs többszörös gyöke.

18.c. $f = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \to f' = 3x^3 + 3x^2 + 4x + 4$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
(& 2 & 1 & 2 & 4 & 1 &) & : & (& 3 & 3 & 4 & 4 &) & = & 4 \; 3 \\
 & & 4 & 1 & 3 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & 2 & 1 & 4 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
(& 3 & 3 & 4 & 4 &) & : & (& 2 & 1 & 4 &) & = \; 4 \; 2 \\
 & & 4 & 3 & 4 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(& 2 & 1 & 4 &) & : & (& 1 & 1 &) & = \; 2 \; 4 \\
 & & 4 & 4 & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & & & &
\end{array}
$$

a legnagyobb közös osztó $d = x+1$. Ennek a gyöke $x_0 = 4$, f-nek egyetlen többszörös gyöke van, a 4. Mivel ez a deriváltnak egyszeres gyöke, ezért 4 az f-nek pontosan kétszeres gyöke. Valóban,

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 2 & 1 & 2 & 4 & 1 &) & : & (& 1 & 2 & 1 &) & = \; 2 \; 2 \; 1 \\
 & & 2 & 0 & 4 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

tehát f osztható $(x-1)^2$-nel. Ugyanakkor a hányados nem osztható ezzel a polinommal, hiszen azonos fokszámú polinomok esetén akkor és csak akkor teljesül az oszthatóság, ha egymás asszociáltjai, vagyis csak egy egységszorzóban különböznek. Test fölötti polinomgyűrű esetén a nem nulla konstans polinomok és csak ezek az egységek, és ez a szorzó nem lehet más, mint a főegyütthatók hányadosa, tehát 2, de $2\left(x^2+2x+1\right) = 2x^2+4x+2 \neq 2x^2+2x+1$ (most elég lett volna a konstans tagokat nézni).

18.d. $f = 2x^5+4x^3+3x^2+4x+2 \rightarrow f' = 2x^2+x+4$;

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
(& 2 & 0 & 4 & 3 & 4 & 2 &) & : & (& 2 & 1 & 4 &) = \; 1 \; 2 \; 4 \; 3 \\
 & & 4 & 0 & 3 & 4 & 2 & & & & & & & \\
 & & & 3 & 0 & 4 & 2 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 3 & 2 & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & & &
\end{array}
$$

$d = 2x^2+x+4 \sim x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$, van többszörös gyök. $x_1 = 3$ és $x_2 = 4$, és mindkét gyök kétszeres (ha valamelyik legalább háromszoros, tehát pontosan háromszoros gyök lenne, akkor ez a gyök a legnagyobb közös osztónak legalább kétszeres gyöke lenne).

18.e. $f = 2x^5 + 5x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 5 \to f' = 3x^4 + 6x^3 + 3x^2 + x + 4;$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
(& 2 & 5 & 1 & 4 & 4 & 5 &) & : & (& 3 & 6 & 3 & 1 & 4 &) & = & 3 & 5 \\
 & & 1 & 6 & 1 & 6 & 5 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 4 & 0 & 1 & 6 & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & (& 3 & 6 & 3 & 1 & 4 &) & : & (& 4 & 0 & 1 & 6 &) & & = & 6 & 5 \\
 & & & 6 & 4 & 0 & 4 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 4 & 2 & 2 & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & (& 4 & 0 & 1 & 6 &) & : & (& 4 & 2 & 2 &) & & & = & 1 & 3 \\
 & & & & 5 & 6 & 6 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$d = 4x^2 + 2x + 2 \approx x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, tehát $x_0 = 5$ az egyetlen többszörös gyöke a polinomnak. Ez a gyök pontosan háromszoros gyöke a polinomnak: $(x-5)^3 = x^3 + 6x^2 + 5x + 1$, így

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
(& 2 & 5 & 1 & 4 & 4 & 5 &) & : & (& 1 & 6 & 5 & 1 &) & = & 2 & 0 & 5 \\
 & & & 5 & 2 & 4 & 5 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

tehát 5 legalább háromszoros gyök, de a hányadosnak, $2x^2+5 = 2x^2-2 = 2\left(x^2-1\right)$-nek nem gyöke 5. (Azt egyébként, hogy legfeljebb háromszoros gyök, onnan is lehet tudni, hogy ha u az f polinom k-szoros gyöke, akkor a deriváltnak legalább $k-1$-szeres gyöke, és így a polinom és a derivált legnagyobb közös osztójának legalább $k-1$-szeres, és legfeljebb k-szoros gyöke. Ez azt jelenti, hogy egy gyök az eredeti polinomnak legalább akkora és legfeljebb eggyel nagyobb többszörösségű gyöke, mint a legnagyobb közös osztónak.)

18.f. $f = x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 2 \to f' = 2x^4 + x^3 + 2x + 1;$

$$\begin{aligned}
x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 2 &= \left(x^3+1\right)\left(x^2+x+2\right) \\
&= (x+1)^3\left(x^2+x+2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x^4 + x^3 + 2x + 1 &= \left(x^3+1\right)(2x+1) \\
&= (x+1)^3(2x+1)
\end{aligned}$$

és x^2+x+2-nek nem gyöke $2x+1$ gyöke, 1, így a legnagyobb közös osztó $d=(x+1)^3$. Most azt látjuk, hogy f-nek és a deriváltjának ugyannnyiszoros (és nem nullaszoros!) gyöke a 2.

18.g. $f=x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+2x^3+x^2+x \to f'=2x^7+x^6+2x^4+x^3+2x+1$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
(& 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 &) & : & (& 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 &) & = & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 2 & 1 \\
 & & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 2 & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
 & (& 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 &) & : & (& 1 & 0 & 0 & 2 &) & & & & & = & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

a legnagyobb közös osztó $d=x^3+2=x^3-1=(x-1)^3=(x+2)^3$, vagyis a polinomnak az 1 többszörös gyöke. f-nek az 1 vagy háromszoros, vagy négyszeres gyöke, de

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
(& 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 &) & : & (& 1 & 2 & 0 & 2 & 1 &) & = & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\
 & & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 2 & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

vagyis $(x+2)^4$-nel osztva a maradék nem nulla, így a polinomnak az 1 háromszoros gyöke. Ugyanakkor

$$\begin{aligned} f' = 2x^7+x^6+2x^4+x^3+2x+1 &= (2x+1)\left(x^6+x^3+1\right) = (2x+1)\left(x^2+x+1\right)^3 \\ &= 2\,(x+2)\left(x^2+4x+4\right)^3 = 2\,(x+2)\,(x+2)^6 = 2\,(x+2)^7 \end{aligned}$$

azaz az 1 a deriváltpolinomnak hétszeres gyöke!

18.h. $f=x^{10}+3x^5+1 \to f'=0$, így $d=f$, a legnagyobb közös osztó nem ad több információt a többszörös gyökökről, mint az eredeti polinom. De $f'=0$-ból következik, hogy $f=g^5$ valamilyen g polinommal. $f=x^{10}+3x^5+1=\left(x^2-2x+1\right)^5=(x-1)^{10}=(x+4)^{10}$, a polinomnak az 1 tízszeres gyöke.

4.1.16. Racionális együtthatós polinom racionális gyökei

19. Ha $0 \neq f \in \mathbf{Q}[x]$, akkor f egyértelműen felírható $f = cg$ alakban, ahol $0 \neq c \in \mathbf{Q}$, és $g \in \mathbf{Z}[x]$ olyan, hogy a főegyütthatója pozitív, és a polinom együtthatói relatív prímek. A két polinom gyökei megegyeznek, így elegendő az utóbbi polinom gyökeit megkeresni. A polinomnak akkor és csak akkor gyöke a 0, ha a konstans tagja 0, és ekkor a polinomból kiemelhetünk x-et. Mivel a polinom nem a nullpolinom, ezért van nem nulla együtthatója, így az előbbi kiemelés véges sokszori ismétlésével olyan polinomot kapunk, amelynek a 0 már nem gyöke. A továbbiakban legyen g ilyen polinom. Ha $g = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, és u racionális gyöke g-nek, akkor $u = \frac{r}{s}$, ahol s pozitív egész, r nullától különböző egész és $(r, s) = 1$, továbbá $r|a_0$ és $s|a_n$. Ez azt jelenti, hogy g racionális gyökeit úgy kereshetjük meg, hogy tekintjük az összes olyan $\frac{r}{s}$ törtet, ahol r és s relatív prím, és r osztója a g konstans tagjának, s pedig a főegyütthatónak, és behelyettesítéssel kiválasztjuk azokat, amelyek gyökei a polinomnak. Ha a konstans tag nem nulla, akkor az osztók száma véges, ezért véges sok próbálkozással valamennyi racionális gyököt megtaláljuk.

Amennyiben a behelyettesítést a Horner-módszerrel végezzük, és gyököt kapunk, akkor a behelyettesítés közben kapott sorozat éppen a hányadospolinom együtthatóinak a sorozata, és nyilván elegendő a további gyököket a hányadospolinomban keresni.

19.a.

$$\begin{aligned} f &= 2/3x^6 + 1/2x^5 - x^4 - 3/2x^3 - 1/2x^2 + x + 5/6 \\ &= 1/6\left(4x^6 + 3x^5 - 6x^4 - 9x^3 - 3x^2 + 6x + 5\right) = 1/6g \end{aligned}$$

és $g = 4x^6 + 3x^5 - 6x^4 - 9x^3 - 3x^2 + 6x + 5$. Először megnézzük, hogy 1 és -1 gyöke-e a polinomnak.

u	4	3	-6	-9	-3	6	5	$g(u)$
1		4	7	1	-8	-11	-5	0

az 1 gyöke a polinomnak, és $g = (x-1)\left(4x^5 + 7x^4 + x^3 - 8x^2 - 11x - 5\right)$. Most elég, ha a második tényező gyökeit keressük:

u	4	7	1	-8	-11	-5	$h(u)$
1		4	11	12	4	-7	-12

vagyis ennek a polinomnak már nem gyöke az 1, az 1 az eredeti polinomnak pontosan egyszeres gyöke. Nézzük a -1-et:

u	4	7	1	-8	-11	-5	$h(u)$
-1		4	3	-2	-6	-5	0
-1			4	-1	-1	-5	0
-1				4	-5	4	-9

így a -1 pontosan kétszeres gyöke f-nek (amikor gyököt kaptunk, akkor aláhúztuk a sort, jelezve, hogy a továbbiakban ebbe a polinomba kell behelyetesíteni). A polinom további gyökei a $4x^3 - x^2 - x - 5$ polinom gyökei. A konstans tag osztói $r : \pm 1, \pm 5$, míg a főegyüttható pozitív osztói $s : 1, 2, 4$, a lehetséges racionális gyökök az olyan $\frac{r}{s}$ törtek, ahol a számláló és a nevező relatív prím (pontosabban szólva, ha $(r, s) = d$, és $\frac{r}{s}$ gyök, akkor $r/s = (r/d) \,/\, (s/d)$, és r/d is osztója a polinom konstans tagjának, s/d pedig a polinom főegyütthatójának).

	u	4	-1	-1	-5	$t(u)$
	5		4	19	94	465
	-5		4	-21	104	-525
	$1/2$		4	1	$*$	$*$
	$-1/2$		4	-3	$*$	$*$
	$5/2$		4	9	$*$	$*$
	$-5/2$		4	-11	$*$	$*$
	$1/4$		4	0	-1	$*$
	$-1/4$		4	-2	$*$	$*$
	$5/4$		4	4	4	0
$4\times$			1	1	1	

(az utolsó gyöknél kapott polinomból ki lehetett emelni 4-et). Most a $-\frac{5}{4}$ vizsgálata következne, de erre már nincs szükség. A kiemelés után kapott x^2+x+1 polinomnak ugyanis már legfeljebb csak ± 1 lehet a racionális gyöke, ami nem gyöke, hiszen ez a két érték már nem volt gyöke annak a polinomnak sem, amelyből ezt a polinomot kaptuk. Így megkaptuk a polinom valamennyi racionális gyökét:

$$\begin{aligned} f &= 1/6 \cdot 4 \cdot (x-1)\,(x+1)^2\,(x-5/4)\left(x^2+x+1\right) \\ &= 1/6\,(x-1)\,(x+1)^2\,(4x-5)\left(x^2+x+1\right) \end{aligned}$$

és a racionális gyökök $1, -1, -1, 5/4$. (Ha $\frac{r}{s}$ gyök, akkor a behelyettesítés során kapott sorozat minden tagja olyan egész szám, amely osztható s-sel, ezért, ha ez valahol nem teljesül, akkor abbahagyható a behelyettesítés. Ezt tettük a fenti táblázat hat, $*$-gal megjelölt sorában is.)

A munkát valamivel rövidíthetjük. $\frac{r}{s}$ csak úgy lehet gyök, ha $r - s | h(1)$ és $r + s | h(-1)$, ahol h az az aktuális polinom, amelybe behelyettesítünk. Az előbbi esetben $t = 4x^3 - x^2 - x - 5$, $t(1) = -3$, $t(-1) = -9$; $5 - 1 \nmid 3$, -$5 - 1 \nmid 3$, így ± 5-öt fölösleges volt helyettesíteni, $1 - 2 | 3$ és $1 + 2 | 9$, $-1 - 2 | 3$ és $-1 + 2 | 9$, ezért $\pm 1/2$-et be kellett helyettesíteni, $5 - 2 | 3$, de $5 + 2 \nmid 9$, $-5 - 2 \nmid 3$, $1 - 4 | 3$, de $1 + 4 \nmid 9$, $-1 - 4 \nmid 3$, ezért $\pm 5/2$-et, $\pm 1/4$-et nem kellett volna helyettesíteni, végül $5 - 4 | 3$ és $5 + 4 | 9$, tehát $5/4$-et ki kell próbálni. Ekkor a táblázat az alábbi lenne:

	u	4	-1	-1	-5	$t(u)$
	$1/2$		4	1		
	$-1/2$		4	-3		
	$5/4$		4	4	4	0
$4\times$			1	1	1	

19.b.

$$f = 2/3x^6 - 10/9x^5 - 2/3x^4 + 4/9x^3 + 10/9x^2 + 2/3x - 10/9 \\ = 2/9\left(3x^6 - 5x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 3x - 5\right)$$

u	3	-5	-3	2	5	3	-5	$g(u)$	
1		3	-2	-5	-3	2	5	0	
1			3	1	-4	-7	-5	0	
1				3	4	0	-7	-12	$\to -6$
-1				3	-2	-2	-5	0	
-1					3	-5	3	-8	

A polinomnak 1 kétszeres és -1 egyszeres gyöke, és ezek után a $t = 3x^3-2x^2-2x-5$ polinom racionális gyökeit keressük, ahol $t(1) = -6$ és $t(-1) = -8$. Az utóbbi közvetlenül látható, míg az előbbit a következőképpen kapjuk. A $g = 3x^6 - 5x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 3x - 5$ polinomnak az 1 kétszeres gyöke, és a gyökök leválasztása után a $h = 3x^4+x^3-4x^2-7x-5$ polinomot kaptuk, amelynek az értéke az 1 helyen $h(1) = -12$. A h polinomnak gyöke a -1, így $h = (x+1)\,t$, ahol $t = 3x^3-2x^2-2x-5$. Ekkor $-12 = h(1) = (1+1)\,t(1)$, és így $t(1) = -6$. A t konstans tagja -5, így $r : \pm 1, \pm 5$, és a főegyüttható 3, ezért $s : 1, 3$. $5 - 1 \nmid 6$ (látható, hogy érdemes volt a -12-t redukálni -6-ra), $-5 - 1 | 6$ és $-5 + 1 | 8$, ezért behelyettesítünk:

u	3	-2	-2	-5	$t(u)$
-5		3	-17	83	-420

a -5 nem gyök. $1 - 3|6$ és $1 + 3|8$:

u	3	-2	-2	-5	$t(u)$
$1/3$		3	-1		

$-1 - 3 \nmid 6$, $5 - 3|6$, $5 + 3|8$:

	u	3	-2	-2	-5	$t(u)$
	$5/3$		3	3	3	0
$3\times$			1	1	1	

és így több racionális gyök nincs

$$f = 2/9 \cdot 3 \cdot (x-1)^2 (x+1)(x-5/3)\left(x^2+x+1\right) = 2/9 (x-1)^2 (x+1)(3x-5)\left(x^2+x+1\right)$$

19.c.

$$f = 2/3x^6 - 7/18x^5 - 34/27x^4 - 56/27x^3 - 1/9x^2 + 245/54x + 25/9 = 1/54\left(36x^6 - 21x^5 - 68x^4 - 112x^3 - 6x^2 + 245x + 150\right) = 1/54g, g = 36x^6 - 21x^5 - 68x^4 - 112x^3 - 6x^2 + 245x + 150$$

u	36	-21	-68	-112	-6	245	150	$g(u)$	
1		36	15	-53	-165	-171	74	224	$\rightarrow 112$
-1		36	-57	-11	-101	95	150	0	
-1			36	-93	82	-183	278	-128	

$h = 36x^5 - 57x^4 - 11x^3 - 101x^2 + 95x + 150$, és $h(1) = 112$, $h(-1) = -128$. A 150 osztói $r : \pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm25, \pm30, \pm50, \pm75, \pm150$, míg a főegyüttható pozitív osztói $s : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$. Most csak olyan r/s-t érdemes vizsgálni, amelyeknél $r + s$ a 128-nál nem nagyobb 2-hatvány, továbbá r és s relatív prím. Ilyen a $3 + 1$, és $3 - 1$ is osztója 112-nek:

u	36	-57	-11	-101	95	150	$h(u)$
3		36	51	142	325	1070	3360

a 3 nem gyök. $-3 + 1 = 2$, és $-3 - 1$ osztja 112-t:

u	36	-57	-11	-101	95	150	$h(u)$
-3		36	-165	484	-1553	4754	-14112

a -3 sem gyök. $5 + 1 = 6$, $-5 + 1 = 4$, de $-5 - 1 = -6$ nem osztója 112-nek. $\pm6 + 1$, $\pm10 + 1$ páratlan, $15 + 1 = 16$, és $15 - 1 = 14|112$

u	36	-57	-11	-101	95	150	$h(u)$
15		36	483	7234	108409	1626230	24393600

$-15 + 1 = -14$, $75 + 1 = 76$, $-75 + 1 = -74$. Most nézzük $s = 2$-t. $r + s$ abszolút értéke csak úgy lehet 2-nek egy hatványa, ha vagy páros, vagy 1. Az utóbbi esetben $r = -3$, ám $-3 - 2 = -5$ nem osztója 112-nek, míg az előbbi esetben r is páros kellene, hogy legyen, de akkor r és s nem relatív prím. $s = 3$ esetén r csak páratlan lehet. $1 + 3 = 4$ és $1 - 3|112$:

u	36	-57	-11	-101	95	150	$h(u)$
$1/3$		36	-45	-26			

$-1+3=2$ és $-1-3=-4|112$:

u	36	-57	-11	-101	95	150	$h(u)$
$-1/3$		36	-69	12	-105	130	

$5+3=8$ és $5+3|112$:

	u	36	-57	-11	-101	95	150	$h(u)$
	$5/3$		36	3	-6	-111	-90	0
$3\times$			12	1	-2	-37	-30	

tehát $5/3$ gyöke a polinomnak. Az $5/3$-hoz tartozó gyöktényezővel, $x-5/3$-dal osztva h-t, és kiemelve 3-at, a $h1=12x^4+x^3-2x^2-37x-30$ polinomot kapjuk. $h1(1)=h(1)/(3\cdot 1-5)=112/(-2)=-56$ és $h1(-1)=h(-1)/(3\cdot(-1)-5)=-128/(-8)=16$, továbbá r-ben csak a 30 osztóit, s-ben a 12 osztóit kell már figyelembe venni, tehát $r:\pm1,\pm2,\pm3,\pm5,\pm6,\pm10,\pm15,\pm30$ és $s:1,2,3,4,6,12$ A továbbiakban már $r+s$ 16-nál nem lehet nagyobb, és továbbra is 2 egy hatványa kell, hogy legyen Azokat a törteket, amelyeket korábban már vizsgáltunk, nem kell újra ellenőrizni és behelyettesíteni, kivéve az utolsót, $5/3$-ot, hiszen 5 most is szerepel a lehetséges számlálók között, és $3+5=8$, $3-5=-2|56$:

	u	12	1	-2	-37	-30	$h1(u)$
	$5/3$		12	21	33	18	0
$3\times$			4	7	11	6	

$h2=4x^3+7x^2+11x+6$, $r=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$, $s=1,2,4$ és

$$h2(1)=h1(1)/(3\cdot 1-5)=-56/(-2)=28$$
$$h2(-1)=h1(-1)/(3\cdot(-1)-5)=16/(-8)=-2$$

és ebből következik, hogy már legfeljebb akkor kapunk racionális gyököt, ha $r:-1,-2,-3,-6$ (mivel a polinom minden együtthatója nem negatív, és a konstans tagja nem nulla, ezért a polinomnak nem lehet nem pozitív gyöke), $s:1,2,4$, és $r-s|28$, $r+s|2$. $r+s=-1$, továbbá $(r,s)=1$. Az 1- és 2-nevezőjű törteket már megvizsgáltuk. $r+s$ relatív prím tagokkal csak úgy lehet osztója 2-nek, ha $|r+s|=1$, vagyis $s=4$ esetén akkor, ha $r=-3$. Mivel $-3-4=-7|28$, ezért ezt a párost behelyettesítjük:

	u	4	7	11	6	$h2(u)$
	$-3/4$		4	4	8	0
$4\times$			1	1	2	

vagyis a $-3/4$ is gyöke a polinomnak, és 4-et kiemelve a $h3 = x^2 + x + 2$ polinomot kapjuk, amelynek már nincs racionális gyöke, hiszen ennek a polinomnak legfeljebb csak 1-nevezőjű, tehát egész szám lehetne racionális gyöke. Összefoglalva tehát

$$\begin{aligned} f &= 1/54 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (x+1)\,(x-5/3)^2\,(x+3/4)\left(x^2+x+2\right) \\ &= 1/54\,(x+1)\,(3x-5)^2\,(4x+3)\left(x^2+x+2\right) \end{aligned}$$

19.d. $f = 3x^7 - 2x^4 + 4x^2 + x - 7$ esetén

u	3	0	0	-2	0	4	1	-7	$f(u)$
1		3	3	3	1	1	5	6	-1
-1		3	-3	3	-5	5	-1	2	-9

A lehetséges számlálók és nevezők $r: \pm1, \pm7$ és $s: 1, 3$. Most csak $|r-s| = 1$, vagyis $r - s = 1$ vagy $r - s = -1$ lehetséges. Ezt a feltételt egyik pár sem elégíti ki, hiszen valamennyi lehetséges r és s páratlan, így a polinomnak nincs racionális gyöke. Általánosításként be lehet látni, hogy ha egy egész együtthatós polinomnak mind a főegyütthatója, mind a konstans tagja páratlan és páratlan a páratlan együtthatók száma is, akkor a polinomnak nincs racionális gyöke.

19.e.

$$\begin{aligned} f &= 5/2x^{10} - 15/2x^9 - 365/32x^8 + 295/32x^7 + 385/8x^6 \\ &\quad +1275/16x^5 + 675/32x^4 - 1485/32x^3 - 405/16x^2 \\ &= 5/32x^2\left(16x^8 - 48x^7 - 73x^6 + 59x^5 + 308x^4\right. \\ &\qquad \left.+510x^3 + 135x^2 - 297x - 162\right). \end{aligned}$$

Ebből a felírásból rögtön látszik, hogy a 0 pontosan kétszeres gyöke a polinomnak, és a polinom további gyökei a $g = 16x^8 - 48x^7 - 73x^6 + 59x^5 + 308x^4 + 510x^3 + 135x^2 - 297x - 162$ polinom gyökei.

u	16	-48	-73	59	308	510	135	-297	-162	$g(u)$	
1		16	-32	-105	-46	262	772	907	610	448	$\rightarrow 224$ $\rightarrow 112$
-1		16	-64	-9	68	240	270	-135	-162	0	
-1			16	-80	71	-3	243	27	-162	0	
-1				16	-96	167	-170	413	-386	224	

vagyis a -1 kétszeres gyök, és a továbbiakban a $h = 16x^6 - 80x^5 + 71x^4 - 3x^3 + 243x^2 + 27x - 162$ polinom gyökeit keressük.A táblázatból látjuk, hogy $h(1) = 112 = 16 \cdot 7$ és $h(-1) = 224 = 32 \cdot 7$. A lehetséges számlálók és nevezők $r: \pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18, \pm27, \pm54, \pm81, \pm162$ és $s: 1, 2, 4, 8, 16$. Azt rögtön látjuk, hogy amennyiben r és s paritása különböző, akkor r/s csak úgy lehet gyök, hogy

$r-s$ és $r+s$ egyikének abszolút értéke 1, a másiké 7, míg azonos paritás esetén mindkettő páratlan, és az előbbi összeg és különbség egyaránt 2-nek egy pozitív egész kitevős hatványa. Elsőként nézzük az esetleges egész gyököket, vagyis amikor $s=1$. Az előbbi feltétel szerint a páros egészek azonnal kiesnek, míg a páratlan egész csak a ± 3 lehet:

u	16	-80	71	-3	243	27	-162	$h(u)$
3		16	-32	-25	-78	9	54	0
3			16	16	23	-9	-18	0
3				16	64	215	636	1890
-3				16	-32	119	-366	1080

így a 3 kétszeres gyök, és más egész gyök (természetesen a korábbi 0-n és -1-en kívül) nincs. Most a $h1=16x^4+16x^3+23x^2-9x-18$ polinomot nézzük. Mivel a 3 kétszeres gyök, ezért $h1(1)=h(1)/(3-1)^2=28=4\cdot 7$ és $h1(-1)=h(-1)/(3+1)^2=14=2\cdot 7$, a lehetséges számlálók és nevezők pedig a 18 és a 16 osztói, az utóbbi esetben a pozitív osztók, vagyis $r:\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18$ és $s:1,2,4,8,16$. A korábbi megfontolások most is érvényesek, így $s=2$ esetén r páratlan, és $r+2$, $r-2$ egyike abszolút értékben 1, a másik 7, ami lehetetlen. Ha $s=4$, akkor hasonló megfontolással $r=\pm3$ a lehetséges értékek:

	u	16	16	23	-9	-18	$h1(u)$
	$3/4$		16	28	44	24	0
$4\times$			4	7	11	6	
	$3/4$			4	10		
	$-3/4$			4	4	8	0
$4\times$				1	1	2	

és a legvégén kapott polinomnak már csak egész racionális gyökei lehetnének, így több racionális gyök nincs, a polinom

$$\begin{aligned} f &= 5/32\cdot 16\cdot x^2(x+1)^2(x-3)^2(x-3/4)(x+3/4)\left(x^2+x+2\right)\\ &= 5/32x^2(x+1)^2(x-3)^2(4x-3)(4x+3)\left(x^2+x+2\right)\end{aligned}$$

19.f.

$$\begin{aligned} f &= 3x^9-23/4x^8-11x^7+45/4x^6-33/4x^5-333/8x^4-39/4x^3+135/8x^2+27/4x\\ &= 1/8x\left(24x^8-46x^7-88x^6+90x^5-66x^4-333x^3-78x^2+135x+54\right)\end{aligned}$$

$=1/8xg$, és a polinomnak a 0 egyszeres gyöke.

u	24	-46	-88	90	-66	-333	-78	135	54	$g(u)$	
1		24	-22	-110	-20	-86	-419	-497	-362	-308	$\to -154$
-1		24	-70	-18	108	-174	-159	81	54	0	
-1			24	-94	76	32	-206	47	34	20	

a -1 egyszeres gyök, és marad a $h = 24x^7 - 70x^6 - 18x^5 + 108x^4 - 174x^3 - 159x^2 + 81x + 54$ polinom, ahol $h(1) = -154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$ és $h(-1) = 20 = 4 \cdot 5$. Ekkor $r : \pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18, \pm27, \pm54$, $s : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$. $2+1 \nmid 20$, $-2-1 \nmid 154$, de $3-1|154$ és $3+1|20$:

u	24	-70	-18	108	-174	-159	81	54	$h(u)$
3		24	2	-12	72	42	-33	-18	0
3			24	74	210	702	2148	6411	19215

a 3 is egyszeres gyöke a polinomnak, és az új polinom $h1 = 24x^6 + 2x^5 - 12x^4 + 72x^3 + 42x^2 - 33x - 18$, $h1(1) = 77 = 7 \cdot 11$, $h1(-1) = -5$, s listája változatlan, és az r-ek korábbi listájából csak azok az értékek maradnak meg, amelyek osztói 18-nak, tehát $r : \pm1, \pm2, \pm3, \pm6, 9, \pm18$ (az s-ek lehetséges értéke csak akkor változik, ha az előző gyök nevezője nagyobb, mint 1, míg a számlálók lehetséges értéke akkor módosul, amikor a gyök számlálójának abszolút értéke nem 1). Látható, hogy r és s egyike páros, míg a másik páratlan kell, hogy legyen. Nézzük még mindig az egész gyököket. $2+1 \nmid 5$, $-2-1 \nmid 77$; $6-1 \nmid 77$, de $-6-1|77$ és $-6+1|5$:

u	24	2	-12	72	42	-33	-18	$h1(u)$
-6		24	-142	840	-4968	29850	179133	1074780

tehát a -6 sem gyök, a ±18 pedig már a nagyságánál fogva sem teljesítheti az egyik osztási feltételt. Most legyen $s = 2$, és ekkor r páratlan. $1+2 \nmid 5$, $-1-2 \nmid 77$, de $3-2|77$ és $3+2|5$:

u	24	2	-12	72	42	-33	-18	$h1(u)$
3/2		24	38	45				

$-3-2 \nmid 77$, $9+2 \nmid 5$, $-9+2 \nmid 5$, így nincs 2-nevezőjű gyöke a polinomnak. Tekintsük ezek után a 3-nevezőjű törteket. Ekkor r csak páros lehet. $r = 2$ rögtön egy lehetséges számláló:

	u	24	2	-12	72	42	-33	-18	$h1(u)$
	2/3		24	18	0	72	90	27	0
$3\times$			8	6	0	24	30	9	

és $h2 = 8x^5 + 6x^4 + 24x^2 + 30x + 9$. Ennek a polinomnak már csak negatív gyöke lehet, így a lehetséges számlálók értéke $r : -1, -3, -9$, míg a nevezők $s : 1, 2, 4, 8$, továbbá $h2\left(1\right)) = 77/1 = 77$, $h2\left(-1\right)) = -5/\left(-5\right) = 1$. Mivel r már csak páratlan lehet, ezért 3-nevezőjű gyöke már biztosan nincs a polinomnak.

Következik $s = 4$. $-1 - 4 \nmid 77$, $3 + 4 \nmid 1$, ám $-3 - 4 | 77$ és $-3 + 4 | 1$:

	u	8	6	0	24	30	9	$h12\left(u\right)$
	$-3/4$		8	0	0	24	12	0
$4\times$			2	0	0	6	3	

a $-3/4$ gyöke a polinomnak. Most $h3 = 2x^4 + 6x + 3$, és ennek a polinomnak már csak egész vagy 2-nevezőjű tört lehetne a racionális gyöke, így a polinomnak nincs több racionális gyöke. Ezek után

$$\begin{aligned} f &= 1/8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x\left(x+1\right)\left(x-3\right)\left(x-2/3\right)\left(x+3/4\right)\left(2x^4+6x+3\right) \\ &= 1/8x\left(x+1\right)\left(x-3\right)\left(3x-2\right)\left(4x+3\right)\left(2x^4+6x+3\right) \end{aligned}$$

4.1.17. Polinom felbontása

20. Test fölött minden nem 0 konstans polinom, és csak ezek, egység, valamennyi elsőfokú polinom felbonthatatlan, és minden legalább másodfokú polinom, amelynek van gyöke a megadott testben, felbontható. Ez utóbbi állítás csak a másod- és harmadfokú polinomok esetén igaz visszafelé, vagyis ha egy test fölötti másod- vagy harmadfokú polinomnak nincs gyöke a megadott testben, akkor a polinom az adott test fölött felbonthatatlan. A komplex számok testében minden legalább elsőfokú komplex együtthatós polinomnak van gyöke, így a komplex együtthatós polinomok körében pontosan az elsőfokú polinomok a felbonthatatlanok. Egy valós együtthatós polinomnak egy komplex gyöke pontosan olyan multiplicitású, mint a gyök konjugáltja. Mivel $\left(x - \alpha\right)\left(x - \overline{\alpha}\right)$ valós együtthatós, ezért a valós számok teste fölött az elsőfokú, valamint a negatív diszkriminánsú másodfokú polinomok a felbonthatatlanok. Az előbbiek alapján még az is igaz, hogy páratlan fokszámú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke, tehát ha legalább harmadfokú, akkor biztosan felbontható a valós számok teste fölött.

A racionális együtthatós polinomok felbontását vissza tudjuk vezetni egész együtthatós polinomok felbontására a megfelelő konstans kiemelése után. Egy egész együtthatós primitív polinom (tehát olyan polinom, ahol az együtthatók – összességükben, nem feltétlenül páronként – relatív prímek) felbonthatóságára vonatkozik a Schönemann-Eisenstein tétel, amely szerint az $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ egész együtthatós polinom felbonthatatlan a racionális számok teste felett, ha van olyan p prímszám, amely nem osztója a_n-nek, de osztója valamennyi további együtthatónak, ám p^2 nem osztója a konstans tagnak (a többi tagnak p bármely pozitív egész kitevős hatványa osztója lehet). A tétel akkor is igaz, ha felcseréljük a konstans tag és a főegyüttható szerepét. A tételből következik, hogy a racionális számok teste felett bármilyen nagy n-re végtelen sok n-edfokú, a racionális számok teste fölött felbonthatatlan polinom létezik, például bármely p prímre az $x^n \pm p$ polinom (vagy a módosított tételnek megfelelően a $px^n \pm 1$ polinom). Nagyon lényeges, hogy a tétel csak egy elégséges feltételt ad a felbonthatatlanságra, és csak olyan test feletti polinomokra alkalmazható, amelynek van olyan részgyűrűje, amelyben vannak prímek, a test minden eleme a részgyűrűből vett két elem hányadosa, és a részgyűrűben csak véges sok egység van (például véges test bármely részgyűrűje, ha van legalább két eleme, test, és testben nincs prím, vagyis például véges testek feletti polinomok esetén a Schönemann-Eisenstein tétel nem használható).

A komplex, valós vagy racionális számok teste feletti felbontás eldöntésénél és a felbontásnál elsőként meghatározzuk a racionális gyököket, miközben figyeljük a Schönemann-Eisenstein tételt. Ha végül olyan polinomot kapunk, amely visszavezethető legfeljebb negyedfokú polinomra, akkor ennek a polinomnak meg lehet gyökképlettel határozni a komplex gyökeit. Ami ezek után még megmaradt, arra itt nem tudunk további vizsgálati módszereket adni, vagyis ha a racionális számok teste fölötti olyan legalább ötödfokú polinom van, amelynek már nincs racionális gyöke, és a Schönemann-Eisenstein tétellel nem találunk megfelelő prímet, akkor a polinomról az ismertetett eszközökkel nem tudjuk eldönteni a felbonthatóságot (de van olyan módszer, amellyel bármely racionális együtthatós polinomot fel tudunk bontani a racionális számok teste fölött irreducibilis polinomok szorzatára!). Ami a további testeket illeti, ezek esetén is vannak egyéb módszerek, de ezekkel itt nem foglalkozunk.

Ha egy gyűrű nem test, akkor ügyelni kell arra, hogy a konstansok között is van felbontható meg felbonthatatlan elem. Például a $6x + 18$ polinom felbonthatatlan a komplex számok teste felett (és így a valós és a racionális számok teste felett is), hiszen elsőfokú, de felbontható az egész számok gyűrűje felett: $6x+18 = 2\cdot3\cdot(x+3)$, és $\mathbf{Z}$ fölött mind a 2, mind a 3 felbonthatatlan.

20.a. A polinom racionális gyökeit meghatároztuk **19.a.**-ban, és azt kaptuk, hogy $f = 1/6\,(x-1)\,(x+1)^2\,(4x-5)\,\left(x^2+x+1\right)$. x^2+x+1 gyökei a megoldóképlettel $x_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, így a racionális és a valós számok teste feletti felbontás az előbbi, míg a komplex számok teste felett

$$f = 2/3\,(x-1)\,(x+1)^2\,(x-5/4)\left(x+\left(1/2-i\sqrt{3}/2\right)\right)\left(x+\left(1/2+i\sqrt{3}/2\right)\right)$$

20.b. **19.b.** alapján $f = 2/3\,(x-1)^2\,(x+1)\,(x-5/3)\left(x^2+x+1\right)$, és az előző pont alapján ez a felbontás a racionális és a valós számok teste felett, míg a komplex számok teste felett

$$f = 2/3\,(x-1)^2\,(x+1)\,(x-5/3)\left(x+\left(1/2-i\sqrt{3}/2\right)\right)\left(x+\left(1/2+i\sqrt{3}/2\right)\right)$$

20.c. $f = 2/9\,(x+1)\,(x-5/3)^2\,(x+3/4)\left(x^2+x+2\right)$ (**19.c.**), és a másodfokú polinomnak nincs racionális gyöke, tehát ez a felbontás $\mathbf{Q}$ fölött. x^2+x+2 komplex gyökei $x_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{7}/2$. Mivel a polinom gyökei nem valósak, ezért az előbbi felbontás egyben $\mathbf{R}$ fölötti felbontás is, és $\mathbf{C}$ fölött

$$f = 2/9\,(x+1)\,(x-5/3)^2\,(x+3/4)\left(x+\left(1/2-i\sqrt{7}/2\right)\right)\left(x+\left(1/2+i\sqrt{7}/2\right)\right)$$

20.d. **19.d.**-ből $f = 3x^7 - 2x^4 + 4x^2 + x - 7$-nek nincs racionális gyöke, és a Schönemann-Eisenstein tételt sem tudjuk alkalmazni, így a megismert módszerekkel nem tudjuk eldönteni a $\mathbf{Q}$ fölötti felbonthatóságot. Mivel a polinom 2-nél magasabb fokú, ezért biztosan felbontható mind a komplex, mind a valós számok teste felett, és páratlan fokú, ezért van valós gyöke.

20.e. **19.e.**-ben meghatároztuk a polinom racionális gyökeit, és e szerint

$$f = 5/2x^2 (x+1)^2 (x-3)^2 (x-3/4)(x+3/4)\left(x^2+x+2\right)$$

A legutolsó polinom másodfokú, és nincs racionális gyöke, ezért ez az alak a felbontás a racionális számok teste fölött. A másodfokú polinomot már felbontottuk **20.c.**-ben, és a polinom gyökei nem valósak, tehát az előbbi felbontás a valós számok teste feletti felbontás is, és a komplex számok teste felett

$$\begin{aligned} f &= 5/2x^2 (x+1)^2 (x-3)^2 (x-3/4)(x+3/4) \\ &\times \left(x+\left(1/2-i\sqrt{7}/2\right)\right)\left(x+\left(1/2+i\sqrt{7}/2\right)\right) \end{aligned}$$

20.f. **19.f.**-ben láttuk, $f = 3/2x(x+1)(x-3)(x-2/3)(x+3/4)\left(2x^4+6x+3\right)$. A negyedfokú polinom gyökei elvileg meghatározhatóak megoldóképlettel, és akkor a polinom elsőfokú polinomok szorzatára bomlik. A valós számok teste felett ez a negyedfokú polinom vagy négy elsőfokú, vagy két elsőfokú és egy másodfokú, vagy két elsőfokú polinom szorzata.

20.g.

$$\begin{aligned} f &= 3x^8 + 4x^7 - 5x^6 - 22/3x^5 - 2/3x^4 + 2/3x^2 + 4/3x \\ &= 1/3x\left(9x^7 + 12x^6 - 15x^5 - 22x^4 - 2x^3 + 2x + 4\right) = 1/3xg \end{aligned}$$

Elsőként meghatározzuk g racionális gyökeit.

u	9	12	-15	-22	-2	0	2	4	$g(u)$		
1		9	21	6	-16	-18	-18	-16	-12	$\to -6$	$\to -3$
-1		9	3	-18	-4	2	-2	4	0		
-1			9	-6	-12	8	-6	4	0		
-1				9	-15	3	5	-11	15		

$h = 9x^5 - 6x^4 - 12x^3 + 8x^2 - 6x + 4$, $h(1) = -3$ és $h(-1) = 15$. A lehetséges számlálók és nevezők $r : \pm 1, \pm 2, \pm 4$ és $s : 1, 3, 9$.

u	9	-6	-12	8	-6	4	$g(u)$
2		9	12	12	32	58	120
-2		9	-24	36	-64	122	-240
4		9	30	108	440	1754	7020
$2/3$		9	0	-12	0	-6	0
$3\times$		3	0	-4	0	-2	

A táblázat alapján $h = 3 \cdot (x - 2/3)\left(3x^4 - 4x^2 - 2\right)$. A negyedfokú polinomra alkalmazható a Schönemann-Eisenstein tétel $p = 2$-vel, ugyanis a 2 nem osztója 3-nak, de osztója 0-nak, -4-nek és -2-nek, ugyanakkor $2^2 = 4$ nem osztója -2-nek. Ez azt jelenti, hogy a negyedfokú polinom felbonthatatlan a racionális számok teste felett, és így nem is lehet racionális gyöke. f tehát $\mathbf{Q}$ fölött

$$f = x\,(x+1)^2\,(x-2/3)\left(3x^4 - 4x^2 - 2\right)$$

$y = x^2$-tel $3x^4 - 4x^2 - 2$-ből a $3y^2 - 4y - 2$ polinomot kapjuk. Ennek gyökei $x_{1,2} = 2/3 \pm \sqrt{4/9 + 2/3} = \left(2 \pm \sqrt{10}\right)/3$, és így $x_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\sqrt{10}+2\right)/3}$, $x_{3,4} = \pm i\sqrt{\left(\sqrt{10}-2\right)/3}$, tehát a $\mathbf{C}$ fölötti felbontás

$$\begin{aligned} f = 3x\,(x+1)^2\,(x-2/3) &\left(x - \sqrt{\left(\sqrt{10}+2\right)/3}\right)\left(x + \sqrt{\left(\sqrt{10}+2\right)/3}\right) \\ \times &\left(x - i\sqrt{\left(\sqrt{10}-2\right)/3}\right)\left(x + i\sqrt{\left(\sqrt{10}-2\right)/3}\right) \end{aligned}$$

A valós számok teste feletti felbontást ebből úgy kapjuk, hogy a két konjugált komplex gyökhöz tartozó gyöktényezőt összeszorozzuk, és ekkor

$$\begin{aligned} f = 3x\,(x+1)^2\,(x-2/3) &\left(x - \sqrt{\left(\sqrt{10}+2\right)/3}\right)\left(x + \sqrt{\left(\sqrt{10}+2\right)/3}\right) \\ \times &\left(x^2 + \left(\sqrt{10}-2\right)/3\right) \end{aligned}$$

20.h. A polinomnak legfeljebb csak -1 lehet a racionális gyöke, és $f(-1) = 0$. Osztva $x+1$-gyel a $g = x^4 + x^2 + 1$ polinomot kapjuk. Ennek a gyökei $\pm\sqrt{-1/2 \pm i\sqrt{3}/2}$. A konjugált gyökökhöz tartozó gyöktényezőket összeszorozva

$$\begin{gathered} \left(x - \sqrt{-1/2 + i\sqrt{3}/2}\right)\left(x - \sqrt{-1/2 - i\sqrt{3}/2}\right) \\ = x^2 - x + 1 \text{ és } \left(x + \sqrt{-1/2 + i\sqrt{3}/2}\right)\left(x + \sqrt{-1/2 - i\sqrt{3}/2}\right) \\ = x^2 + x + 1 \end{gathered}$$

így a valós számok teste felett $f=(x+1)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$, és ez egyben a $\mathbf{Q}$ fölötti felbontás is, hiszen a másodfokú tényezőknek nincs valós, de akkor racionális gyöke sem. A komplex számok teste feletti felbontás $f=\prod_{k=1}^{5}\left(x-\varepsilon_k^{(6)}\right)$, ugyanis $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^6-1\right)/(x-1)$, a számláló gyökei a 6. komplex egységgyökök, és a nevezőben az $\varepsilon_0^{(6)}=1$-hez tartozó gyöktényező áll.

20.i. f-nek nincs racionális gyöke, és a polinom harmadfokú, így felbonthatatlan $\mathbf{Q}$ fölött. A komplex számok teste fölött három elsőfokú tényező szorzata, míg a valós számok teste fölött vagy három elsőfokú, vagy egy első- és egy másodfokú polinom szorzata.

4.1.18. Gyűrű és a gyűrű fölötti polinomgyűrű kapcsolata

21.

21.a. Euklideszi gyűrű egységelemes integritási tartomány, és $R[x]$ akkor és csak akkor egységelemes integritási tartomány, ha R hasonló tulajdonságú, továbbá ha a polinomgyűrűnek van legalább két eleme, akkor az alapgyűrű is tartalmaz a nullelemtől különböző elemet. Most legyen R egy legalább két elemet tartalmazó integritási tartomány, amely nem test. Ekkor van R-nek a nullától és az egységektől különböző u eleme. Az $f=x$ és $g=u$ polinomok legnagyobb közös osztója e, a gyűrű egységeleme, ám nem létezik olyan f_1 és g_1 R feletti polinom, amellyel $e=f_1f+g_1g$, hiszen a jobb oldalon álló polinom konstans tagja u többszöröse. Mivel euklideszi gyűrűben két elem legnagyobb közös osztója mindig felírható a két elem ugyanezen gyűrűből vett együtthatókkal kifejezett lineáris kombinációjaként, míg ez x és u esetén nem lehetséges, ezért $R[x]$ nem lehet euklideszi gyűrű.

21.b. Legalább kételemű integritási tartomány karakterisztikája bármely nem nulla elemének additív rendjével egyenlő. Ha a gyűrűnek van legalább két eleme, és integritási tartomány, akkor a gyűrű feletti polinomgyűrű is legalább két elemet tartalmazó integritási tartomány, így a karakterisztikája az előbbiek szerint egy tetszőleges nem nulla elemének additív rendje. De a polinomgyűrű részgyűrűként tartalmazza az eredeti gyűrűt, így az eredeti gyűrű valamely nem nulla elemének additív rendje azonos a két gyűrűben, és így a két gyűrű karakterisztikája is azonos.

4.1.19. Helyettesítési érték

22.a.

u	2	0	3	-7	$f(u)$
5		2	10	53	258
$5/2$		2	5	$31/2$	$127/4$
$2,5$		2	5	$15,5$	$31,75$
$1/3$		2	$2/3$	$29/9$	$-160/27$
3		2	6	21	56
$2\pi/3$		2	$4\pi/3$	$\left(8\pi^2+27\right)/9$	$\left(16\pi^3+54\pi-189\right)/27$
$3-2i$		2	$6-4i$	$13-24i$	$-16-98i$
$3+2i$		2	$6+4i$	$13+24i$	$-16+98i$
$(2,2\pi/3)=$ $-1+\sqrt{3}i$		2	$-2+2\sqrt{3}i$	$-1-4\sqrt{3}i$	$6+3\sqrt{3}i$
$(2,-2\pi/3)=$ $-1-\sqrt{3}i$		2	$-2-2\sqrt{3}i$	$-1+4\sqrt{3}i$	$6-3\sqrt{3}i$

22.b.

u	-7	3	0	2	$f(u)$
$1/3$		-7	$2/3$	$2/9$	$56/27$
3		-7	-18	-54	-160
$(1/2,-2\pi/3)=$ $-1/4-i\sqrt{3}/4$		-7	$19/4+7\sqrt{3}/4i$	$2/16-26\sqrt{3}/16i$	$3/4+3\sqrt{3}/8i$
$(1/2,2\pi/3)=$ $-1/4+i\sqrt{3}/4$		-7	$19/4-7\sqrt{3}/4i$	$2/16+26\sqrt{3}/16i$	$3/4-3\sqrt{3}/8i$

22.c.

u	1	1	1	$f(u)$
$(1,\pi/3)=1/2+i\sqrt{3}/2$		1	$3/2+i\sqrt{3}/2$	$1+\sqrt{3}i$
$(1,-\pi/3)=1/2-i\sqrt{3}/2$		1	$3/2-i\sqrt{3}/2$	$1-\sqrt{3}i$
$(1,2\pi/3)=-1/2+i\sqrt{3}/2$		1	$1/2+i\sqrt{3}/2$	0
$(1,-2\pi/3)=-1/2-i\sqrt{3}/2$		1	$1/2-i\sqrt{3}/2$	0

22.d.

u	1	-1	1	$f(u)$
$(1,\pi/3) = 1/2 + i\sqrt{3}/2$		1	$-1/2 + i\sqrt{3}/2$	0
$(1,-\pi/3) = 1/2 - i\sqrt{3}/2$		1	$-1/2 - i\sqrt{3}/2$	0
$(1,2\pi/3) = -1/2 + i\sqrt{3}/2$		1	$-3/2 + i\sqrt{3}/2$	$1 - \sqrt{3}i$
$(1,-2\pi/3) = -1/2 - i\sqrt{3}/2$		1	$-3/2 - i\sqrt{3}/2$	$1 + \sqrt{3}i$

22.e.

u	$1-i$	$-2+3i$	$4-2i$	$f(u)$
$2+i$		$1-i$	$1+2i$	$4+3i$
$2-i$		$1-i$	-1	$2-i$

22.f.

u	$1+i$	$-2-3i$	$4+2i$	$f(u)$
$2+i$		$1-i$	-1	$2+i$
$2-i$		$1+i$	$1-2i$	$4-3i$

22.g. $f = x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$

u	1	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$	$f(u)$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 19 \\ -10 & 26 \end{pmatrix}$

(Vigyázat! u-val jobbról kell szorozni!)

22.h.

u	1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$f(u)$	1	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$g(u)$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$		1	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$

$f(u)\,g(u) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -8 & 18 \end{pmatrix}$. Összehasonlítva az előző eredménnyel látjuk, hogy $(fg)(u) \neq f(u)\,g(u)$. Ennek az az oka, hogy egy polinomban a határozatlan felcserélhető az együtthatóval, ám a mátrixszorzás nem kommutatív. Ha $f = x + A$, $g = x + B$, ahol A és B mátrix, és C egy további mátrix, akkor $fg = (x + A)(x + B) = x^2 + (A + B)x + AB$, tehát $(fg)(C) = C^2 + (A + B)C + AB$, míg $f(C)g(C) = (C + A)(C + B) = C^2 + AC + CB + AB$, és ha $BC \neq CB$, akkor ez a két érték különböző. Nem kommutatív gyűrű fölötti polinomok esetén tehát általában nem igaz, hogy szorzatpolinom helyettesítési értéke megegyezik a tényezőpolinomok helyettesítési értékének szorzatával.

22.i.

$$
\begin{array}{c|c}
u & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\hline\hline
1 & \\
-1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
-5 & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
3 & \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
2 & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hline
f(u) & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

(Ha a polinom együtthatói $a_0, \ldots, a_4$, ahol a_4 a főegyüttható, akkor a mátrix utolsó oszlopában az i-edik elem éppen $-a_i$. Tetszőleges $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, polinom esetén az ilyen n-edrendű $\mathbf{A}^{(f)}$ mátrix, vagyis ahol $0 \leq i < n \wedge 0 \leq j < n : A^{(f)}_{i,j} = \delta_{i-1,j}e - \delta_{n-1,j}a_i$, a polinom *kísérőmátrixa*. Belátható, hogy minden esetben $f\left(\mathbf{A}^{(f)}\right) = \mathbf{0}$.)

4.1.20. Polinom és deriváltja többszörös gyökei

23.

23.a. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, így 1 az f-nek pontosan egyszeres gyöke. $f' = 2x$, $f'(1) = 2 \neq 0$, tehát 1 a deriváltnak nem gyöke.

23.b. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = (x+2)(x+1)$, és $(x+2)(1) = 3 = 0$, $(x+1)(1) = 2 \neq 0$, így 1 az f-nek pontosan egyszeres gyöke. $f' = 2x$, $f'(1) = 2 \neq 0$, tehát 1 a deriváltnak nem gyöke.

23.c. $x^2 - 1 = x^2 + 1 = (x+1)^2$, így 1 az f-nek pontosan kétszeres gyöke. $f' = 2x = 0$, és így 1 a deriváltnak akárhányszoros gyöke.

23.d. $x^4 - 2x^2 + 1 = \left(x^2 - 1\right)^2 = ((x-1)(x+1))^2 = (x-1)^2(x+1)^2$, így 1 az f-nek pontosan kétszeres gyöke. $f' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)$, tehát 1 a deriváltnak pontosan egyszeres gyöke, azaz eggyel kisebb multiplicitású gyöke, mint f-nek.

23.e.

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 + 1 &= \left(x^2 - 1\right)^2 = ((x-1)(x+1))^2 \\ &= (x-1)^2(x+1)^2 = (x+2)^2(x+1)^2 \end{aligned}$$

így 1 az f-nek pontosan kétszeres gyöke. $f' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1) = 4x(x+2)$, tehát 1 a deriváltnak pontosan egyszeres gyöke, azaz eggyel kisebb multiplicitású gyöke, mint f-nek.

23.f. $x^4 - 2x^2 + 1 = \left(x^2 - 1\right)^2 = \left(x^2 + 1\right)^2 = \left((x+1)^2\right)^2 = (x+1)^4$, így 1 az f-nek pontosan négyszeres gyöke. $f' = 4x^3 - 4x = 0$, és a nullpolinomnak a test bármely eleme akárhányszoros gyöke.

23.g. Mivel u nem gyöke g-nek, ezért f-nek pontosan k-szoros gyöke.

$$\begin{aligned} f' &= k(x-u)^{k-1}g + (x-u)g' \\ &= (x-u)^{k-1}(kg + (x-u)g') \end{aligned}$$

tehát u az f'-nek legalább $k-1$-szeres gyöke. $(kg + (x-u)g')(u) = kg(u)$, és ez akkor és csak akkor 0, ha k osztható a gyűrű karakterisztikájával, hiszen $g(u) \neq 0$, és a gyűrű nullosztómentes. Ám $\mathbf{Z}$ karaktersiztikája 0, és $k > 0$, így az oszthatóság nem teljesül, ezért $kg + (x-u)g'$-nak nem gyöke u, és így u a deriváltnak pontosan $k-1$-szeres gyöke (lásd Láng Csabáné: bevezető fejezetek a matematikába II, 59. tétel, 117. oldal).

23.h. Mivel u nem gyöke g-nek, ezért f-nek pontosan k-szoros gyöke.

$$\begin{aligned} f' &= k(x-u)^{k-1}g + (x-u)g' \\ &= (x-u)^{k-1}(kg + (x-u)g') \end{aligned}$$

tehát u az f'-nek legalább $k-1$-szeres gyöke. $(kg + (x-u)\,g')\,(u) = kg\,(u)$, és ez akkor és csak akkor 0, ha k osztható a gyűrű karakterisztikájával, hiszen $g\,(u) \neq 0$, és a gyűrű nullosztómentes. Ám $\mathbf{Z}_p$ karaktersiztikája p, és a feltétel szerint $p \nmid k$, ezért $kg + (x-u)\,g'$-nak nem gyöke u, és így u a deriváltnak pontosan $k-1$-szeres gyöke.

23.i. Mivel u nem gyöke g-nek, ezért f-nek pontosan kp-szeres gyöke. $f' = kp\,(x-u)^{kp-1}\,g + (x-u)\,g' = (x-u)^{k-1}\,(p\,(kg) + (x-u)\,g')$, tehát u az f'-nek legalább $k-1$-szeres gyöke. $p\,(kg) + (x-u)\,g' = (x-u)\,g'$, és $((x-u)\,g')\,(u) = 0$, tehát u a deriváltnak legalább k-szoros gyöke (ha g'-nek nem gyöke, akkor pontosan k szoros gyöke, egyébként k-nál nagyobb multiplicitású gyöke).

23.j. u az $f = (x-u)^{kp}\,g^p + (x-u)^l\,h$ polinomnak pontosan $m = \min\{kp, l\}$-szeres gyöke (mivel p nem osztója l-nek, ezért $kp \neq l$, így $x-u$ kiemelése után az egyik tagnak gyöke, a másik tagnak nem gyöke az u, és akkor az összegüknek sem gyöke). $f' = (x-u)^{l-1}\,(lh + (x-u)\,h')$-nek **23.h.** szerint pontosan $l-1$-szeres gyöke u. Ha tehát $l < kp$, akkor a polinom deriváltjának pontosan eggyel kisebb multiplicitású gyöke u, mint magának a polinomnak, egyébként viszont legalább ugyanakkora többszörösségű gyöke, és a deriváltnak ez utóbbi esetben csaknem bármennyivel lehet nagyobb többszörösségű gyöke. A csaknem azt jelenti, hogy ez esetben a deriváltban az u multiplicitása nem lehet olyan, amely p-vel osztva $p-1$-et ad maradékul.

5. Ajánlott irodalom

Gonda János: *Bevezető fejezetek a matematikába III.*
ELTE TTK, Budapest, 1998
Gonda János: *Gyakorlatok és feladatok a Bevezetés a matematikába c. tárgyhoz*
Polinomok, véges testek, kongruenciák, kódolás
ELTE TTK, Budapest, 2001
Járai Antal: *Bevezetés a matematikába.*
ELTE Eötvös Kiadó, 2005.
Láng Csabáné: *Bevezető fejezetek a matematikába II.*
ELTE Budapest, 2000.