EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Simon Péter

Laplace-transzformáció

Ez a tanulmány az Európai Unió támogatásával,
az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával készült
(a támogatás száma: TÁMOP 4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0003).

BUDAPEST, 2012

Előszó

Összefoglaljuk a *Laplace-transzformációval* kapcsolatos alapvető fogalmakat, állításokat. Példákat mutatunk az alkalmazásokra a közönséges, ill. a parciális differenciál-egyenletek és rendszerek, differencia-egyenletek, integrálegyenletek területéről. Kitérünk a *Laplace-transzformáció* és a trigonometrikus *Fourier-transzformáció* kapcsolatára. Tárgyaljuk a *Mellin-transzformáció* néven ismert inverz-transzformációt, ill. ennek néhány alkalmazását. Az *Irodalomjegyzékben* számos művet sorolunk fel, amelyekre a tanulmány megírásakor részben támaszkodtunk. A belső hivatkozásokat általában mellőzzük, de minden eredmény, amely említésre kerül, megtalálható a felsorolt művekben.

Ez a tanulmány az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával készült (a támogatás száma: TÁMOP 4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0003).

Tartalomjegyzék

1. A $\mathcal{D}_L$ függvényhalmaz.

Legyen $f : [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ olyan (*Lebesgue*-szerint) mérhető függvény, amelyre igazak az alábbiak:

1^o minden $b > 0$ mellett véges az $\int_0^b |f(t)|\,dt$ (*Lebesgue*-) integrál;

2^o van olyan $z \in \mathbf{C}$ komplex szám, amelyre

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt := \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt \in \mathbf{C}.$$

Jelöljük a továbbiakban az ilyen tulajdonságú f függvények halmazát $\mathcal{D}_L$-lel.

1.1. Megjegyzések.

i) Tegyük fel pl., hogy az $f : [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ mérhető függvény eleget tesz 1^o-nek, továbbá alkalmas $\gamma \in \mathbf{R}$, $K, c \geq 0$ számokkal majdnem minden (m.m.) $t \geq c$ pontban

$$|f(t)| \leq Ke^{\gamma t}.$$

Ekkor $f \in \mathcal{D}_L$. Ha ui. $z \in \mathbf{C}$ és $\mathrm{Re}\, z > \gamma$, akkor m.m. $t \geq c$ esetén

$$|f(t)e^{-tz}| = |f(t)|e^{-t\mathrm{Re}\, z} \leq Ke^{-t(\mathrm{Re}\, z - \gamma)}.$$

Következésképpen

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz}|\,dt \leq \int_0^c |f(t)e^{-tz}|\,dt + K\int_c^{+\infty} e^{-t(\mathrm{Re}\, z-\gamma)}\,dt \leq$$

$$\max_{0\leq t\leq c} |e^{-tz}| \int_0^c |f| + K \lim_{b\to+\infty} \int_c^b e^{-t(\mathrm{Re}\, z-\gamma)}\,dt =:$$

$$\gamma + \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{K}{\mathrm{Re}\, z - \gamma} \left(e^{-c(\mathrm{Re}\, z-\gamma)} - e^{-b(\mathrm{Re}\, z-\gamma)} \right) \right) =$$

$$\gamma + \frac{K}{\mathrm{Re}\, z - \gamma} e^{-c(\mathrm{Re}\, z-\gamma)} < +\infty,$$

azaz $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz}|\,dt < +\infty$. Ezért az $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt$ improprius integrál is konvergens. Jelöljük az ilyen tulajdonságú f függvények halmazát $\mathcal{D}_L^\gamma$-val.

Tehát $\mathcal{D}_L^\gamma \subset \mathcal{D}_L$. Világos, hogy tetszőleges $f \in L^\infty[0,+\infty)$ függvényre $f \in \mathcal{D}_L^0$, azaz $L^\infty[0,+\infty) \subset \mathcal{D}_L$.

ii) Legyen $f \in \mathcal{D}_L^\gamma$ az előbbi megjegyzésben szereplő függvény, $\beta > \gamma$ és $c < b < d$. Ekkor tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \geq \beta$ esetén (az i)-ben látottakkal analóg módon)

$$\left|\int_b^d f(t)e^{-tz}\,dt\right| \leq K\int_b^d e^{-t(\operatorname{Re} z-\gamma)}\,dt =$$

$$\frac{K}{\operatorname{Re} z-\gamma}\left(e^{-b(\operatorname{Re} z-\gamma)} - e^{-d(\operatorname{Re} z-\gamma)}\right) \leq \frac{K}{\beta-\gamma}e^{-b(\beta-\gamma)}.$$

Ha $\varepsilon > 0$ és $b_0 > c$ olyan, hogy $e^{-b_0(\beta-\gamma)} < \varepsilon$, akkor bármely $b_0 < b < d$ esetén

$$\left|\int_b^d f(t)e^{-tz}\,dt\right| \leq \frac{K\varepsilon}{\beta-\gamma}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq \beta\}$ félsíkon az $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt$ improprius integrál egyenletesen konvergens. Az eddigiekből az is kiderült, hogy ha $b > c$ tetszőlegesen rögzített, akkor $\left|\int_b^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt\right| \to 0 \quad (\operatorname{Re} z \to +\infty)$. Mutassuk meg, hogy

$$\left|\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt\right| \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \to +\infty).$$

Mindez triviális, ha valamilyen $C > 0$ konstanssal $|f(t)| \leq C$ teljesül m.m. $t \in [a,b]$ esetén. Ekkor ui.

$$\left|\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt\right| \leq C\int_0^b e^{-t\operatorname{Re} z}\,dt = C\frac{1-e^{-b\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \gamma),$$

ahol $\frac{1-e^{-b\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z} \to 0 \quad (\operatorname{Re} z \to +\infty)$. Különben legyen tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett $g : [0,b] \to \mathbf{C}$ olyan mérhető függvény, amellyel $\int_0^b |f(t)-g(t)|\,dt < \varepsilon$ és alkalmas $C > 0$ konstanssal $|g(t)| \leq C$ m.m. $t \in [0,b]$ esetén. Ekkor

$$\left|\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt\right| \leq \int_0^b |f(t)-g(t)|e^{-t\operatorname{Re} z}\,dt + C\frac{1-e^{-b\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z} \leq$$

$$\varepsilon + C\frac{1-e^{-b\,\mathrm{Re}\,z}}{\mathrm{Re}\,z} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z > \gamma).$$

Tehát $\left|\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt\right| \le 2\varepsilon$ hacsak $\mathrm{Re}\,z$ már elég nagy.

iii) Ha pl. $n \in \mathbf{N}$ és $h_n(t) := t^n \quad (t \ge 0)$, akkor h_n nyilván eleget tesz az i) megjegyzés feltételeinek, azaz $h_n \in \mathcal{D}_L$. Innen az is rögtön következik, hogy bármely P polinom esetén az $f(t) := P(t) \quad (t \ge 0)$ leszűkítés is $\mathcal{D}_L$-beli.

iv) Legyen P polinom, $\beta \in \mathbf{R}$ és $f(t) := P(t)e^{\beta t} \quad (t \ge 0)$. Ekkor $f \in \mathcal{D}_L$.

v) Ugyanakkor pl. az $f(t) := e^{t^2} \quad (t \ge 0)$ függvény nem $\mathcal{D}_L$-beli. Valóban, legyen $a \in \mathbf{R}$ tetszőleges valós szám. Ekkor bármely $t \in \mathbf{R}$, $t > 2a$ esetén $e^{t^2}e^{-at} = e^{t^2-at} > e^{t^2/2}$, azaz

$$\int_0^b e^{t^2}e^{-at}\,dt > \int_0^b e^{t^2/2}\,dt \to +\infty \qquad (b \to +\infty).$$

Tegyük fel, hogy z olyan komplex szám, amelyre létezik és véges az $\int_0^{+\infty} e^{t^2}e^{-tz}\,dt$ integrál és legyen $\varphi(x) := \int_0^x e^{t^2}e^{-tz}\,dt \quad (x > 0)$. Ekkor bármely $a \in \mathbf{R}$, $a > \mathrm{Re}\,z$ és $b > 0$ esetén parciális integrálás után

$$\left|\int_0^b e^{t^2}e^{-at}\,dt\right| = \left|\int_0^b e^{t^2}e^{-tz}e^{-t(a-z)}\,dt\right| \le$$

$$\left|\varphi(b)e^{-b(a-z)}\right| + |a-z|\int_0^b |\varphi(t)||e^{-t(a-z)}|\,dt.$$

Mivel a feltételezésünk szerint létezik és véges a $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$ határérték és φ folytonos, ezért φ korlátos függvény. Következésképpen

$$\left|\varphi(b)e^{-b(a-z)}\right| \le \sup_{x\ge 0}|\varphi(x)|e^{-b(a-\mathrm{Re}\,z)} \to 0 \qquad (b \to +\infty).$$

Továbbá

$$\int_0^b |\varphi(t)||e^{-t(a-z)}|\,dt \le \sup_{x\ge 0}|\varphi(x)|\int_0^b e^{-t(a-\mathrm{Re}\,z)}\,dt =$$

$$\sup_{x\geq 0}|\varphi(x)|\frac{1-e^{-b(a-\operatorname{Re} z)}}{a-\operatorname{Re} z}\to\frac{\sup_{x\geq 0}|\varphi(x)|}{a-\operatorname{Re} z}<+\infty\qquad(b\to+\infty),$$

amiből

$$+\infty=\sup_{b\geq 0}\left|\int_0^b e^{t^2}e^{-at}\,dt\right|\leq$$

$$\sup_{b\geq 0}\left(\left|\varphi(b)e^{-b(z-a)}\right|+|a-z|\int_0^b|\varphi(t)|\left|e^{-t(z-a)}\right|\,dt\right)<+\infty$$

következne, ami nem lehet. Ezért egyetlen $z\in\mathbf{C}$ esetén sem lehet konvergens az $\int_0^{+\infty}e^{t^2}e^{-tz}\,dt$ integrál, így $f\notin\mathcal{D}_L$.

vi) Hasonlóan látható be, hogy $\exp\circ\exp\notin\mathcal{D}_L$.

vii) Ha f abszolút integrálható $[0,+\infty)$-n, azaz $f\in L^1[0,+\infty)$, akkor bármely $z\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z\geq 0$ esetén

$$\left|f(t)e^{-tz}\right|=|f(t)|e^{-t\operatorname{Re} z}\leq|f(t)|\qquad(t\geq 0)$$

miatt a $0\leq t\mapsto f(t)e^{-tz}$ függvény is $L^1[0,+\infty)$-beli. Ezért létezik (és véges) az $\int_0^{+\infty}f(t)e^{-tz}\,dt$ integrál. Következésképpen $L^1[0,+\infty)\subset\mathcal{D}_L$.

viii) Az $f:[0,+\infty)\to\mathbf{C}$ mérhető függvény *exponenciális típusú,* ha van olyan $x\in\mathbf{R}$, hogy az $f_x(t):=f(t)e^{-tx}\quad(t\geq 0)$ függvény $L^1[0,+\infty)$-beli. Ekkor tetszőleges $z\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z\geq x$ esetén

$$\int_0^{+\infty}|f(t)e^{-tz}|\,dt=\int_0^{+\infty}|f_x(t)|e^{t(x-\operatorname{Re} z)}\,dt\leq\int_0^{+\infty}|f_x(t)|\,dt<+\infty$$

azaz a $0\leq t\mapsto f(t)e^{-tz}$ függvény integrálható. Következésképpen $f\in\mathcal{D}_L$. Ha tehát $\mathcal{D}_L^{\exp}$ jelöli a most definiált exponenciális típusú függvények halmazát, akkor $\mathcal{D}_L^{\exp}\subset\mathcal{D}_L$, továbbá nyilván $L^1[0,+\infty)\subset\mathcal{D}_L^{\exp}$, ill. $\mathcal{D}_L^{\gamma}\subset\mathcal{D}_L^{\exp}\quad(\gamma\in\mathbf{R})$.

2. Laplace-transzformált.

2.1. Tétel.

Legyen $f \in \mathcal{D}_L, z_0 \in \mathbf{C}$ *és tegyük fel, hogy* $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz_0}\,dt \in \mathbf{C}$. *Ekkor bármely* $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ *esetén* $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt \in \mathbf{C}$.

Bizonyítás. Az előző 1.1. v) megjegyzésben követett gondolatmenet általánosítható: legyen ehhez $\varphi(t) := \int_0^t f(x)e^{-xz_0}\,dx \quad (t \geq 0)$. Ekkor a φ függvény abszolút folytonos $[0,b]$-n $\quad (b > 0)$, ill. majdnem minden $\tau \geq 0$ helyen φ differenciálható τ-ban és $\varphi'(\tau) = f(\tau)e^{-\tau z_0}$. Ezért minden $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ és $b > 0$ mellett $\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt = \int_0^b f(t)e^{-tz_0}e^{-t(z-z_0)}\,dt$, ahol

$$\int_0^b f(t)e^{-tz_0}e^{-t(z-z_0)}\,dt = \varphi(b)e^{-b(z-z_0)} + (z-z_0)\int_0^b \varphi(t)e^{-t(z-z_0)}\,dt =:$$

$$A(b) + B(b).$$

Mivel

$$\lim_{b\to+\infty} \varphi(b) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz_0}\,dt \in \mathbf{C}\ , \lim_{b\to+\infty} |e^{-b(z-z_0)}| = \lim_{b\to+\infty} e^{-b(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0)} = 0,$$

ezért $\lim_{b\to+\infty} \varphi(b)e^{-b(z-z_0)} = 0$, azaz $\lim_{b\to+\infty} A(b) = 0$.

A φ függvény folytonos és $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) \in \mathbf{C}$, ezért φ korlátos, így egy alkalmas K számmal

$$\int_0^b |\varphi(t)e^{-t(z-z_0)}|\,dt \leq K\int_0^b |e^{-t(z-z_0)}|\,dt = K\int_0^b e^{-t(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0)}\,dt =$$

$$\frac{K}{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0}\left(1 - e^{-b(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0)}\right) \to \frac{K}{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0} \qquad (b \to +\infty).$$

Következésképpen létezik $\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t(z-z_0)}\,dt \in \mathbf{C}$, azaz $\lim_{b\to+\infty} B(b) \in \mathbf{C}$ és

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty} B(b) =$$

$$(z-z_0)\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t(z-z_0)}\,dt \in \mathbf{C}. \blacksquare$$

2.1. Megjegyzések.

i) A most bebizonyított tétel alapján nyilvánvaló, hogy bármely $f, h \in \mathcal{D}_L$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ mellett $\alpha f + \beta h \in \mathcal{D}_L$.

ii) Valamely $f \in \mathcal{D}_L$ esetén legyen $Lf \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ az a függvény, amelyre

$$\mathcal{D}_{Lf} := \left\{ z \in \mathbf{C} : \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt \in \mathbf{C} \right\}$$

és

$$Lf(z) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt \qquad (z \in \mathcal{D}_{Lf}).$$

Az így definiált L leképezést *Laplace-operátor*nak nevezzük (Euler (1737), Laplace (1782)). Pl. az 1.1. i), ill. ii) megjegyzésében szereplő $f \in \mathcal{D}_L^\gamma$ függvényekre (az ottani jelölésekkel) $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > \gamma\} \subset \mathcal{D}_{Lf}$. Hasonlóan, ha $f \in L^1[0, +\infty)$, akkor $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\} \subset \mathcal{D}_{Lf}$, ill. $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$ esetén valamilyen $x \in \mathbf{R}$ számmal $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > x\} \subset \mathcal{D}_{Lf}$.

iii) Ha $f \in \mathcal{D}_L$, akkor legyen

$$q_f := \inf \left\{ x \in \mathbf{R} : \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt \in \mathbf{C} \;\; (z \in \mathbf{C},\, \operatorname{Re} z > x) \right\}.$$

Világos, hogy bármely $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > q_f$ esetén $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt \in \mathbf{C}$, ill., ha $z \in \mathbf{C}$ és $\operatorname{Re} z < q_f$, akkor az $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt$ integrál nem konvergens. Tehát

$$\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > q_f\} \subset \mathcal{D}_{Lf} \subset \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq q_f\}.$$

Pl. tetszőleges $f \in \mathcal{D}_L^\gamma$ függvényre nyilván $q_f \leq \gamma$.

iv) Ha $f, h \in \mathcal{D}_L$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, akkor $q_{\alpha f + \beta h} \leq \max\{q_f, q_h\}$.

v) A iii) megjegyzés szoros analógiát mutat a hatványsorokkal kapcsolatos ismert eredménnyel (ld. *Cauchy-Hadamard*-tétel). Nevezetesen legyen $a_n, a, z_0 \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ és tegyük fel, hogy $\sum_{n=0}^\infty a_n(z_0 - a)^n \in \mathbf{C}$. Ekkor tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $|z - a| < |z_0 - a|$ esetén is $\sum_{n=0}^\infty a_n(z - a)^n \in \mathbf{C}$. Ha

$$R := \sup\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^\infty a_n(z - a)^n \in \mathbf{C} \qquad (z \in \mathbf{C}, |z - a| < r)\},$$

akkor a

$$K_R(a) := \{z \in \mathbf{C} : |z-a| < R\}\ ,\ \overline{K_R(a)} := \{z \in \mathbf{C} : |z-a| \le R\}$$

jelölésekkel

$$K_R(a) \subset \{z \in \mathbf{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n \in \mathbf{C}\} \subset \overline{K_R(a)}.$$

vi) Legyen most valamely $f \in \mathcal{D}_L$ és $z_0 \in \mathbf{C}$ esetén $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz_0}\,dt$ abszolút konvergens, azaz $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz_0}|\,dt < +\infty$. Ekkor minden $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \ge \operatorname{Re} z_0$ helyen $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt$ is abszolút konvergens. Ui.

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz}|\,dt = \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t\operatorname{Re} z}\,dt \le$$

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t\operatorname{Re} z_0}\,dt = \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz_0}|\,dt < +\infty.$$

A most mondottakból az is kiderült, hogy ekkor

$$|Lf(z)| \le \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz_0}|\,dt \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z \ge\ \operatorname{Re} z_0).$$

Ha $Q_f := \inf\left\{x \in \mathbf{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz}|\,dt < +\infty : z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > x\right\}$ (ahol most legyen $\inf \emptyset := +\infty$), akkor nyilván $q_f \le Q_f$, ill. bármely $z, v \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > Q_f$, $\operatorname{Re} v < Q_f$ esetén $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt$ abszolút konvergens, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tv}\,dt$ nem abszolút konvergens. Az 1.1. i) megjegyzésben foglaltak szerint tetszőleges $f \in \mathcal{D}_L^{\gamma}$ függvényre $Q_f \le \gamma$, ill. (ld. 1.1. vii) megjegyzés) $f \in L^1[0,+\infty)$ esetén $Q_f \le 0$. Világos, hogy ha $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$ (ld. 1.1. viii) megjegyzés), azaz valamilyen $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-tx}dt < +\infty,$$

akkor tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \ge x$ komplex számra az $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}dt$ integrál az

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz}|dt \le \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-tx}dt < +\infty$$

becslés miatt abszolút konvergens. Fordítva, ha $f \in \mathcal{D}_L$ és egy $\mathbf{C} \ni z$ számra $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}dt$ abszolút konvergens, azaz $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t\,\mathrm{Re}\,z}dt < +\infty$, akkor $f \in \mathcal{D}_L^{\mathrm{exp}}$.

vii) Az előző megjegyzésben említett triviális $q_f \le Q_f$ egyenlőtlenségben előfordulhat, hogy $q_f < Q_f$ (más szóval tehát egy $f \in \mathcal{D}_L$ függvényre az Lf *Laplace*-transzformáltat definiáló improprius integrál konvergencia- és abszolút konvergencia tartománya nem feltétlenül esik egybe. Ennek az igazolására tekintsük ui. az alábbi extrém példát:

$$f(t) := \begin{cases} 0 & (0 \le t < a := \ln\ln 3) \\ \\ (-1)^n e^{e^t/2} & (\ln\ln n \le t < \ln\ln(n+1) \ \ (n = 3, 4, ...). \end{cases}$$

Ekkor bármely $z \in \mathbf{C}$ komplex számra nyilván

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-tz}|dt = \int_a^{+\infty} |f(t)e^{-tz}|dt = \int_a^{+\infty} e^{-t\,\mathrm{Re}\,z + e^t/2}dt = +\infty.$$

Ugyanakkor legyen pl. $z := 0$, ill. $n = 3, 4, ...$ és

$$I_n := \int_{\ln\ln n}^{\ln\ln(n+1)} e^{e^t/2}dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\,dx.$$

Az $(I_n, n = 3, 4, ...)$ sorozat monoton fogyó és $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. Ezért (a *Leibniz*-sorokra vonatkozó elemi tétel miatt) a $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n I_n$ végtelen sor, következésképpen az $\int_0^{\ln\ln n} f(t)\,dt \quad (n = 3, 4, ...)$ integrálok sorozata konvergens. Innen már nem nehéz meggondolni, hogy egyúttal a $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(t)\,dt$ véges határérték is létezik, azaz $0 \in \mathcal{D}_{Lf}$.

viii) Emeljük ki külön is a 2.1. Tétel bizonyításából a következőt: ha $f \in \mathcal{D}_L, z_0 \in \mathcal{D}_{Lf}$ és

$$\varphi(t) := \int_0^t f(x)e^{-xz_0}dx \qquad (t \ge 0),$$

akkor bármely $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\,z > \mathrm{Re}\,z_0$ esetén $z \in \mathcal{D}_{Lf}$ és

$$Lf(z) = (z - z_0)\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t(z-z_0)}dt.$$

Sőt, a bizonyításból az is kiderült, hogy ebből a szempontból $z_0 \in \mathcal{D}_{Lf}$ nem lényeges, csak annyit használtunk ki, hogy a fenti φ függvény korlátos. Lássuk be továbbá, hogy ha $0 \le \alpha < \pi/2$ és

$$\mathcal{D}_{\alpha,z_0} := \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0, \arg(z - z_0) \le \alpha\},$$

akkor a $\mathcal{D}_{\alpha,z_0}$-beli z-kre az $Lf(z)$-t definiáló $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}dt$ integrál $\mathcal{D}_{\alpha,z_0}$-n egyenletesen konvergens. Legyen ui. $z_0 \ne z \in \mathcal{D}_{\alpha,z_0}$, ekkor a 2.1. Tétel bizonyítása szerint

$$\int_0^b f(t)e^{-tz}dt = \varphi(b)e^{-b(z-z_0)} + (z - z_0)\int_0^b \varphi(t)e^{-t(z-z_0)}dt \qquad (b > 0).$$

Figyelembe véve a triviális

$$Lf(z_0) - e^{-b(z-z_0)}Lf(z_0) - (z - z_0)\int_0^b Lf(z_0)e^{-t(z-z_0)}dt = 0$$

egyenlőséget, amit az előzőhöz hozzáadva a következőt kapjuk:

$$\int_0^b f(t)e^{-tz}dt =$$

$$Lf(z_0) + e^{-b(z-z_0)}(\varphi(b) - Lf(z_0)) + (z - z_0)\int_0^b (\varphi(t) - Lf(z_0))e^{-t(z-z_0)}dt.$$

Innen tetszőleges $0 < c < b$ esetén az adódik, hogy

$$\int_c^b f(t)e^{-tz}dt = e^{-b(z-z_0)}(\varphi(b) - Lf(z_0)) - e^{-c(z-z_0)}(\varphi(c) - Lf(z_0)) +$$

$$(z - z_0)\int_c^b (\varphi(t) - Lf(z_0))e^{-t(z-z_0)}dt.$$

Mivel $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = Lf(z_0) \in \mathbf{C}$, ezért bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, amellyel $|\varphi(t) - Lf(z_0)| < \varepsilon \quad (t > \delta)$. Ha tehát az előbbiekben $\delta < c < b$, akkor (a nyilvánvaló $\left|e^{-x(z-z_0)}\right| = e^{-x\operatorname{Re}(z-z_0)} < 1 \quad (x > 0)$ egyenlőtlenségre is tekintettel) azt mondhatjuk, hogy

$$\left|\int_c^b f(t)e^{-tz}dt\right| \leq 2\varepsilon + |z-z_0|\varepsilon\int_c^b e^{-t\,\mathrm{Re}\,(z-z_0)}dt \leq$$

$$2\varepsilon + |z-z_0|\varepsilon\int_0^{+\infty} e^{-t\,\mathrm{Re}\,(z-z_0)}dt = \varepsilon\left(2+\frac{|z-z_0|}{\mathrm{Re}\,(z-z_0)}\right).$$

Mivel $(z_0 \neq)z \in \mathcal{D}_{\alpha,z_0}$, ezért

$$\frac{\mathrm{Re}\,(z-z_0)}{|z-z_0|} = \cos\left(\arg\left(z-z_0\right)\right) \geq \cos\,\alpha\,(>0).$$

Így

$$\left|\int_c^b f(t)e^{-tz}dt\right| \leq \varepsilon\left(2+\frac{1}{\cos\,\alpha}\right).$$

ix) Az előző megjegyzést felhasználva lássuk be a következő *egyértelműségi* tételt: *tegyük fel, hogy* $f,g \in \mathcal{D}_L$ *és valamilyen* $a \in \mathbf{R}$ *esetén* $Lf(z) = Lg(z) \quad (z \in \mathbf{C},$ $Re\,z > a)$. *Ekkor* $f(t) = g(t)$ $(\text{m.m.}\,t \geq 0)$. Ez nyilván azzal ekvivalens, hogy ha $h \in \mathcal{D}_L$ és $Lh(z) = 0 \quad (z \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}\,z > a)$, akkor $h(t) = 0$ $(\text{m.m.}\,t \geq 0)$. Sőt, azt látjuk be, hogy ha valamilyen $z_0 \in \mathbf{C}$ és $\mathbf{R} \ni \sigma > 0$ esetén

$$Lh(z_0+n\sigma) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor $h(t) = 0$ $(\text{m.m.}\,t \geq 0)$. Valóban (ld. viii)) tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\,z > \mathrm{Re}\,z_0$ helyen

$$Lh(z) = (z-z_0)\int_0^{+\infty}\varphi(t)e^{-t(z-z_0)}dt$$

(ahol most $\varphi(t) := \int_0^t h(x)e^{-xz_0}dx \qquad (t \geq 0)$). Ezért azt mondhatjuk, hogy

$$Lh(z_0+n\sigma) = n\sigma\int_0^{+\infty}\varphi(t)e^{-tn\sigma}dt = 0 \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

A $\sigma t = -\ln\,x$, ill.

$$\psi(x) := \varphi(-(\ln\,x)/\sigma) \quad (0 < x \leq 1)\;,\; \psi(0) := \lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = Lh(z_0)$$

helyettesítéssel az előbbi egyenlőségekből

$$\int_0^1 x^k \psi(x)\,dx = 0 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

következik. Tehát a folytonos ψ függvény valamennyi momentuma zérus. Jól ismert, hogy ebből $\psi \equiv 0$ következik, amiből meg nyilván azt kapjuk, hogy $\varphi \equiv 0$. Mivel a klasszikus *Lebesgue*-féle differenciálhatósági tétel miatt $0 = \varphi'(t) = h(t)e^{-tz_0}$ (m.m. $t \geq 0$), ezért innen $h(t) = 0$ (m.m. $t \geq 0$) már adódik.

x) A most igazolt egyértelműségi tétel szerint egy *Laplace*-transzformáltnak csak a triviális esetben lehet periódusa. Tehát: ha $f \in \mathcal{D}_L$ és valamilyen $0 \neq \xi \in \mathbf{C}$ komplex számmal $Lf(z) = Lf(z+\xi)$ $(z \in \mathcal{D}_{Lf})$, akkor $Lf \equiv 0$. Valóban, a periodicitási egyenlőség másképp írva a következőt jelenti:

$$0 = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}dt - \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t(z+\xi)}dt = \int_0^{+\infty} f(t)(1-e^{-t\xi})e^{-tz}dt.$$

Ezért $f(t)(1-e^{-t\xi}) = 0$ (m.m. $t \geq 0$). Az $e^{-t\xi} = 1$ egyenlőség legfeljebb megszámlálható sok $t \geq 0$ esetén teljesülhet, így $f(t) = 0$ (m.m. $t \geq 0$), azaz $Lf \equiv 0$.

xi) Tegyük fel, hogy $f \in L^1[0,+\infty)$, $z \in \mathbf{C}$, $x := \operatorname{Re} z \geq 0$, $y := \operatorname{Im} z$, ekkor (ld. 1.1. viii) megjegyzés) a

$$\Phi_{x,f}(t) := \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ f(t)e^{-xt} = f_x(t) & (t \geq 0) \end{cases}$$

jelöléssel

$$Lf(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}e^{-\imath yt}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{x,f}(t)e^{-\imath yt}\,dt.$$

Nyilván $\Phi_{x,f} \in L^1(-\infty,+\infty)$ és $Lf(z) = \widehat{\Phi}_{x,f}(y)$, ahol egy $g \in L^1(-\infty,+\infty)$ függvény esetén

$$\hat{g}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-\imath yt}\,dt \qquad (y \in \mathbf{R})$$

a g függvény *Fourier-transzformáltja.* Ha itt $g = \chi_{[a,b]} \in L^\infty[0,+\infty)$ az $[a,b]$ $(0 \leq a, b \in \mathbf{R},\ a < b)$ intervallum karakterisztikus függvénye és $0 \leq x \in \mathbf{R}$, akkor

$$|\widehat{\Phi}_{x,g}(s)| = \left|\int_a^b e^{-xt}e^{-\imath st}dt\right| = \left|\frac{1}{x+\imath s}\left(e^{-a(x+\imath s)} - e^{-b(x+\imath s)}\right)\right| =$$

$$\frac{e^{-ax}+e^{-bx}}{\sqrt{x^2+s^2}} \le \frac{2}{|s|} \qquad (0 \ne s \in \mathbf{R}).$$

Innen rögtön következik, hogy ha $N \in \mathbf{N}, c_1, ..., c_N \in \mathbf{R}$, $a_k, b_k \in \mathbf{R}$, $0 \le a_k < b_k$ $(k = 1, ..., N)$ és $g = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{[a_k,b_k]} \in L^\infty[0,+\infty)$ (*lépcsősfüggvény*), akkor

$$|\widehat{\Phi}_{x,g}(s)| \le \frac{2N\|g\|_\infty}{|s|} =: \frac{C_g}{|s|} \qquad (0 \ne s \in \mathbf{R}).$$

Legyen a fenti $f \in L^1[0,+\infty)$ függvény és tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $g \in L^\infty[0,+\infty)$ olyan lépcsősfüggvény, amelyre $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Megtartva az előbbi jelöléseket ekkor

$$|Lf(z)| \le |L(f-g)(z)| + |Lg(z)| = \left|\widehat{\Phi}_{x,f-g}(y)\right| + \left|\widehat{\Phi}_{x,g}(y)\right| \le$$

$$\|f-g\|_1 + \frac{C_g}{|y|} < \varepsilon + \frac{C_g}{|y|} \qquad (y \ne 0).$$

Következésképpen van olyan $\delta > 0$, hogy $|Lf(z)| < 2\varepsilon \quad (z \in \mathbf{C}, |y| > \delta)$. Más szóval tetszőleges $f \in L^1[0,+\infty)$ esetén

$$Lf(z) \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \ge 0, |\operatorname{Im} z| \to +\infty),$$

mégpedig $\mathbf{C} \ni z$-ben egyenletesen: bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, amellyel $|Lf(z)| < \varepsilon \quad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z \ge 0, |\operatorname{Im} z| > \delta)$. Világos, hogy

$$\lim_{x\to 0} \Phi_{x,f}(t) = \Phi(t) := \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ f(t) & (t \ge 0), \end{cases}$$

$|\Phi_{x,f}(t)| \le |\Phi(t)| \quad (x \ge 0, t \in \mathbf{R})$ és $\Phi \in L^1(-\infty,+\infty)$. Alkalmazható tehát a *Lebesgue*-féle konvergencia-tétel, miszerint

$$\lim_{x\to+0} Lf(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{x\to 0}\left(\Phi_{x,f}(t)e^{-\imath yt}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)e^{-\imath yt}\, dt = \widehat{\Phi}(y),$$

azaz $\lim_{\operatorname{Re} z \to +0} Lf(z) = \widehat{\Phi}(\operatorname{Im} z)$.

(Itt jegyezzük még meg, hogy a fenti $Lf(z) = \widehat{\Phi}_{x,f}(y)$ egyenlőség alapján a ix)-beli egyértelműségi tétel $f \in L^1[0, +\infty)$ esetén a *Fourier*-transzformáltakra vonatkozó analóg állításból is következik. Ha ui. $Lf \equiv 0$, akkor $\widehat{\Phi}_{x,f}(y) = 0 \quad (y \in \mathbf{R})$, amiből $\Phi_{x,f}(t) = 0 \quad (\text{m.m.}\, t \in \mathbf{R})$, azaz $f(t)e^{-tx} = 0 \quad (\text{m.m.}\, t \geq 0)$. Innen már nyilván adódik az, hogy $f(t) = 0 \quad (\text{m.m.}\, t \geq 0)$. Mivel ebből a szempontból csak $\Phi_{x,f} \in L^1(-\infty, +\infty)$, azaz $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-tx}\, dt < +\infty$ a lényeg, ezért mindez elmondható $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$ esetén is.)

Ha a fenti f függvényre $f \in L^1[0, +\infty)$ nem igaz ugyan, de azért $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$ igen (azaz a *Laplace*-transzformáltját meghatározó integrál egy alkalmas „függőleges” félsíkban abszolút konvergens), akkor valamilyen $x \in \mathbf{R}$ mellett $f_x \in L^1[0, +\infty)$. Legyen $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > x$, ekkor $Lf(z) = Lf_x(z - x)$ és kapjuk az előbbiek szerinti $Lf(z) \to 0 \quad (|\operatorname{Im} z| \to +\infty)$ egyenletes konvergenciát a $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > x\}$ félsíkban.

xii) Mutassuk meg, hogy ha $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$, akkor

$$Lf(z) \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \to +\infty)$$

és a fenti konvergencia $\mathbf{C} \ni z$-ben egyenletes: minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy $|Lf(z)| < \varepsilon \quad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \delta)$. Valóban, $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$ miatt alkalmas $x \in \mathbf{R}$ esetén $f_x \in L^1[0, +\infty)$ (ahol emlékeztetőül: $f_x(t) = f(t)e^{-tx}$ $(t \geq 0)$). Ha tehát $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > x$, akkor

$$|Lf(z)| \leq \int_0^{+\infty} |f_x(t)|e^{(x - \operatorname{Re} z)t} dt,$$

ahol bármely $t \geq 0$ mellett

$$f_x(t)e^{(x - \operatorname{Re} z)t} \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \to +\infty)$$

és $|f_x(t)e^{(x - \operatorname{Re} z)t}| \leq |f_x(t)|$. Mivel $f_x \in L^1[0, +\infty)$, ezért alkalmazható a *Lebesgue*-tétel:

$$\int_0^{+\infty} |f_x(t)|e^{(x - \operatorname{Re} z)t} dt \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \to +\infty).$$

Speciálisan (ld. xi)): ha $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$, akkor alkalmas $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$Lf(z) \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \geq x, |z| \to +\infty).$$

Sőt, bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadhatók olyan α, β „határok”, hogy

$$|Lf(z)| < \varepsilon \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z \geq \alpha,\ \mathrm{Im}\, z \geq \beta).$$

xiii) Ha csak annyit tudunk, hogy $f \in \mathcal{D}_L$ és $z_0 \in \mathcal{D}_{Lf}$, akkor a következőt mondhatjuk (ld. viii)): bármely $0 \leq \alpha < \pi/2$ esetén

$$Lf(z) \to 0 \qquad (z \in \mathcal{D}_{\alpha,z_0},\ |z| \to +\infty).$$

Valóban, ha $z \in \mathcal{D}_{\alpha,z_0}$ és $0 < c < b$, akkor

$$Lf(z) = \int_0^c f(t)e^{-tz}dt + \int_c^b f(t)e^{-tz}dt + \int_b^{+\infty} f(t)e^{-tz}dt.$$

Legyen $\mathrm{Re}\, z \geq 0$, $\varepsilon > 0$ és válasszuk az előbbi c-t úgy, hogy

$$\left| \int_0^c f(t)e^{-tz}dt \right| \leq \int_0^c |f(t)|\, dt < \varepsilon$$

teljesüljön. (Mivel f lokálisan integrálható, ezért van ilyen c.) Ugyanakkor a fenti viii) megjegyzésben bebizonyított egyenletes konvergencia miatt a b megválasztható úgy, hogy (minden szóban forgó z mellett)

$$\left| \int_b^{+\infty} f(t)e^{-tz}dt \right| < \varepsilon$$

is igaz legyen. Legyen továbbá a pozitív x szám olyan, hogy ha z-re még $\mathrm{Re}\, z \geq x$ is fennáll, akkor

$$\left| \int_c^b f(t)e^{-tz}dt \right| \leq e^{-c\,\mathrm{Re}\, z} \int_c^b |f(t)|\, dt \leq e^{-cx} \int_c^b |f(t)|\, dt < \varepsilon$$

(ami megint csak az f függvény lokális integrálhatósága, azaz az $\int_c^b |f(t)|\, dt$ integrál végessége miatt biztosítható). Összefoglalva tehát azt mondhatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $x > 0$, hogy

$$|Lf(z)| < \varepsilon \qquad (z \in \mathcal{D}_{\alpha,z_0},\ \mathrm{Re}\, z \geq x),$$

amiből az állításunk már nyilván következik. (Nem nehéz meggondolni, hogy most sem lényeges az, hogy $z_0 \in \mathcal{D}_{Lf}$.)

xiv) Lássuk be végül, hogy ha $f \in \mathcal{D}_L, \varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor (ld. 2.1. iii) megjegyzés)

$$\frac{Lf(z)}{\operatorname{Im} z} \to 0 \qquad (\operatorname{Re} z \geq q_f + \varepsilon, |\operatorname{Imz}| \to +\infty)$$

teljesül $\operatorname{Re} z$-ben egyenletesen. (A $q_f = -\infty$ esetben a fenti konvergencia tetszőleges „függőleges” félsíkban értendő.) Valóban, legyen $x := q_f + \varepsilon/2$ (a $q_f > -\infty$ esetben), ha pedig $q_f = -\infty$, akkor legyen $x \in \mathbf{R}$ tetszőleges. A xiii) megjegyzés szerint

$$Lf(z) \to 0 \qquad (z \in \mathcal{D}_{\pi/6,x}, |z| \to +\infty).$$

A 2.1. Tétel bizonyításában látottaknak megfelelően

$$Lf(z) = (z - x) \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z-x)} dt \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \mathcal{D}_{\pi/6,x}, \text{ Rez } \geq x + \varepsilon),$$

ahol $\varphi(t) = \int_0^t f(t) e^{-tx} dt$ $(t \geq 0)$. Mivel (ld. a 2.1. Tétel bizonyítása) φ korlátos függvény és

$$\int_0^{+\infty} \left| e^{-t(z-x)} \right| dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(\operatorname{Re} z - x)} dt < +\infty,$$

ezért az $Lf(z)$-t definiáló előbbi integrál abszolút konvergens. A xi) megjegyzés végén mondottak alapján tehát

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z-x)} dt \to 0 \qquad (|\operatorname{Im} z| \to +\infty)$$

(a $\{\xi \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \xi \geq x + \varepsilon\}$ félsíkban egyenletesen). A $z \in \mathbf{C} \setminus \mathcal{D}_{\pi/6,x}$ elemekre viszont

$$\frac{|\operatorname{Im} z|}{|z - x|} \geq \sin(\pi/6) = \frac{1}{2},$$

azaz $|z - x| \leq 2|\operatorname{Im} z|$, ezért

$$\left| \frac{Lf(z)}{\operatorname{Im} z} \right| \leq 2 \left| \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z-x)} \, dt \right| \to 0 \qquad (|\operatorname{Im} z| \to +\infty)$$

egyenletesen, amiből az állításunk már nyilván következik.

xv) Legyen $f(t) := \dfrac{1}{1+t^2}$ $(t \geq 0)$. Ekkor $0 \in \mathcal{D}_{Lf}$, ui. $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt$ a $z = 0$ helyen abszolút konvergens:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{0\cdot t}}{1+t^2}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Következésképpen a vi) megjegyzés szerint $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\} \subset \mathcal{D}_{Lf}$. Ha $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z < 0$, akkor legyen $\operatorname{Re} z < a < 0$. Mivel bármely $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén $f(t)e^{-at} \geq e^{-an}/(5n^2)$ $\quad (n \leq t \leq n+1)$, ezért

$$\int_n^{n+1} f(t)e^{-at}\,dt \geq \frac{e^{-an}}{5n^2} \to +\infty \qquad (n \to +\infty),$$

tehát $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}\,dt = +\infty$. Így $a \notin \mathcal{D}_{Lf}$, azaz (ld. 2.1. Tétel) $z \notin \mathcal{D}_{Lf}$. Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy $\mathcal{D}_{Lf} = \{z \in \mathbf{R} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

xvi) Ha $g(t) := \dfrac{t}{1+t^2}$ $\quad (t \geq 0)$, akkor $0 \notin \mathcal{D}_{Lg}$, ui.

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \ln(1+b^2) = +\infty.$$

A 2.1. Tétel miatt ezért bármely $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z < 0$ esetén $z \notin \mathcal{D}_{Lg}$, azaz

$$\mathcal{D}_{Lg} \subset \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\} \setminus \{0\}.$$

Mutassuk meg, hogy itt „$\subset$ ” helyett „$=$ ” is írható. Ehhez elég azt belátnunk (ld. 2.1. Tétel), hogy tetszőleges $0 \neq y \in \mathbf{R}$ mellett $\imath y \in \mathcal{D}_{Lg}$, azaz

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\imath yt}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t\cos(yt)}{1+t^2}\,dt - \imath \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(yt)}{1+t^2}\,dt \in \mathbf{C}.$$

Ez azzal ekvivalens, hogy az előbbi két (valós) improprius integrál konvergens. Pl. $y > 0$ esetén az első integrált illetően a következőt mondhatjuk (az $y < 0$ eset, ill. a második integrál hasonlóan kezelhető): legyen

$$J_n := \int_{(1+2n)\pi/(2y)}^{(3+2n)\pi/(2y)} \frac{t\cos(yt)}{1+t^2}\,dt \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy páros n-ekre J_n negatív, páratlan n-ekre J_n pozitív. Továbbá

$$J_n = \int_{(1+2n)\pi/2}^{(3+2n)\pi/2} \frac{t\cos t}{y^2+t^2}\, dt \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A $0 \leq t \mapsto \dfrac{t}{y^2+t^2}$ függvény $t > y$ esetén szigorúan monoton fogyó, ui. ekkor (könnyen ellenőrizhetően) a deriváltja negatív. Ha $n_0 \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $y < (1+2n_0)\pi/2$, akkor minden $\mathbf{N} \ni n \geq n_0$ és $(1+2n)\pi/2 < t < (3+2n)\pi/2$ mellett

$$\frac{(3+2n)\pi/2}{y^2+(3+2n)^2\pi^2/4} < \frac{t}{y^2+t^2} < \frac{(1+2n)\pi/2}{y^2+(1+2n)^2\pi^2/4},$$

ill. $\displaystyle\int_{(1+2n)\pi/2}^{(3+2n)\pi/2} \cos t\, dt = 2(-1)^n$.

Innen

$$\frac{2(3+2n)\pi}{4y^2+(3+2n)^2\pi^2} < |J_n| < \frac{2(1+2n)\pi}{4y^2+(1+2n)^2\pi^2} \qquad (n_0 \leq n \in \mathbf{N}),$$

azaz $\lim(J_n) = 0$ és $|J_{n+1}| < |J_n| \quad (n_0 \leq n \in \mathbf{N})$ következik. Ezért $\sum_{n=0}^{\infty} J_n \in \mathbf{R}$. Figyelembe véve azt, hogy ha $(1+2n)\pi/(2y) < b < (3+2n)\pi/(2y) \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor

$$\left| \int_{(1+2n)\pi/(2y)}^{b} \frac{t\cos(yt)}{1+t^2}\, dt \right| \leq \int_{(1+2n)\pi/(2y)}^{(3+2n)\pi/(2y)} \frac{t}{1+t^2}\, dt \leq$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{3+2n}{1+2n} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért az eddig mondottakból $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\cos(yt)}{1+t^2}\, dt \in \mathbf{R}$ már következik.

xvii) Az előbbiekhez hasonlóan vizsgálható az

$$f(t) := \begin{cases} 0 & (t = 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}} & (t > 0) \end{cases}$$

függvény. Egyrészt ui. világos, hogy $0 \notin \mathcal{D}_{Lf}$, mivel

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\cdot 0}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{c\to 0}\int_c^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$\lim_{c\to 0}\left[2\sqrt{t}\right]_c^1 + \lim_{b\to+\infty}\left[2\sqrt{t}\right]_1^b = 2\lim_{c\to 0}(1-\sqrt{c}) + 2\lim_{b\to+\infty}(\sqrt{b}-1) = +\infty.$$

Tehát (ld. 2.1. Tétel) $\mathcal{D}_{Lf} \subset \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\} \setminus \{0\}$. Ha viszont $0 \neq y \in \mathbf{R}$, akkor $\imath y \in \mathcal{D}_{Lf}$, amihez azt kell megmutatni, hogy az

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(yt)}{\sqrt{t}}\,dt \;,\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin(yt)}{\sqrt{t}}\,dt$$

(valós) impproprius integrálok konvergensek. Mivel bármely $b > 0$ és $h \in \{\cos, \sin\}$ esetén

$$\int_0^b \left|\frac{h(ty)}{\sqrt{t}}\right| dt \leq \int_0^b \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{c\to 0}\int_c^b \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$\lim_{c\to 0}\left[2\sqrt{t}\right]_c^b = 2\lim_{c\to 0}(\sqrt{b}-\sqrt{c}) = 2\sqrt{b},$$

ezért elég már csak azt megmutatni, hogy egy-egy alkalmas $b > 0$ számmal $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{h(yt)}{\sqrt{t}}\,dt \in \mathbf{R}$. Pl. $h := \sin$, $y > 0$ esetén legyen $b := \pi/y$, ekkor

$$\int_{\pi/y}^{+\infty} \frac{\sin(yt)}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{y}}\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Ha $K_n := \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt \quad (1 \leq n \in \mathbf{N})$, akkor $K_n = (-1)^n$, továbbá

$$|K_{n+1}| < |K_n| \leq \sqrt{\pi}/\sqrt{n} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

amiből $\lim(K_n) = 0$ és $\sum_{n=1}^\infty K_n \in \mathbf{R}$ következik. Mivel $n\pi \leq a \leq (n+1)\pi$ $(1 \leq n \in \mathbf{N})$ esetén nyilván

$$\left|\int_{n\pi}^a \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt\right| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{\pi}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) =$$

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0 \qquad (n \to +\infty),$$

ezért $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathbf{R}.$

Az $y < 0$, ill. a $h := \cos$ eset hasonlóan kezelhető. Összefoglalva így azt kaptuk, hogy $\mathcal{D}_{Lf} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\} \setminus \{0\}$. Ha pl. $x > 0$, akkor (megfelelő helyettesítéssel)

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}.$$

Mivel a (valós) négyzetgyökfüggvény egyértelműen terjeszthető ki a (0-ban „kilyukasztott”) $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\} \setminus \{0\}$ komplex félsíkon differenciálható függvénnyé, ezért tetszőleges $z \in \mathcal{D}_{Lf}$ helyen is $Lf(z) = \sqrt{\pi}/\sqrt{z}$ (ahol $z = re^{\imath\alpha}$ $(r > 0, |\alpha| \leq \pi/2$ esetén $\sqrt{z} := \sqrt{r}e^{\imath\alpha/2})$.

Megjegyezzük még, hogy $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ esetén $Lf(z)$ abszolút konvergens. Valóban, ha $\operatorname{Re} z =: a > 0$, akkor

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-tz}}{\sqrt{t}}\right| dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

3. Példák.

3.1. Legyen $f(t) := 1 \ \ (t \geq 0)$. Ekkor $0 \neq z \in \mathbf{C}$ esetén

$$\int_0^{+\infty} e^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-tz}\,dt = \frac{1}{z}\left(1 - \lim_{b\to+\infty} e^{-bz}\right) \in \mathbf{C}$$

azzal ekvivalens, hogy

$$\lim_{b\to+\infty} |e^{-bz}| = \lim_{b\to+\infty} e^{-b\operatorname{Re} z} = 0,$$

azaz, hogy $\operatorname{Re} z > 0$. Ezért $f \in \mathcal{D}_L, q_f = 0$ és

$$Lf(z) = \frac{1}{z} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0).$$

Világos, hogy $0 \notin \mathcal{D}_{Lf}$.

3.2. Tekintsük most az $f(t) := t \ \ (t \geq 0)$ függvényt. Ha $0 \neq z \in \mathbf{C}$, akkor

$$\int_0^{+\infty} te^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b te^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \left(\left[-t\frac{e^{-tz}}{z} \right]_0^b + \frac{1}{z} \int_0^b e^{-tz}\,dt \right) =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{z} be^{-bz} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} e^{-bz} \right] \in \mathbf{C}$$

most is azzal ekvivalens, hogy $\lim_{b\to+\infty} e^{-bz} = 0$, azaz, hogy $\operatorname{Re} z > 0$. Ekkor

$$Lf(z) = \frac{1}{z^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0)$$

és $q_f = 0$.

3.3. Az előbbi példa általánosításaként legyen $n \in \mathbf{N}$ és $h_n(t) := t^n \quad (t \geq 0)$. Mutassuk meg, hogy

$$Lh_n(z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0).$$

Az $n = 0, 1$ eseteket az előbbi példákban már elintéztük, ezért (ld. teljes indukció) elegendő megmutatni, hogy

$$Lh_n(z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \implies Lh_{n+1}(z) = \frac{(n+1)!}{z^{n+2}} \qquad (n \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0).$$

Valóban, parciálisan integrálva $\lim_{b\to+\infty} e^{-bz} = 0$ miatt

$$Lh_{n+1}(z) = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b t^{n+1} e^{-tz}\,dt =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left(\left[-\frac{t^{n+1}e^{-tz}}{z} \right]_0^b + \frac{n+1}{z} \int_0^b t^n e^{-tz}\,dt \right) = \frac{n+1}{z} Lh_n(z) =$$

$$\frac{n+1}{z} \frac{n!}{z^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}.$$

A most vizsgált példa speciális esete a $h_\alpha(t) := t^\alpha \quad (-1 < \alpha \in \mathbf{R}, t > 0)$ függvényosztálynak. Lássuk be, hogy

$$Lh_\alpha(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}} \qquad (z \in \mathbf{R},\ \mathrm{Re}\, z > 0),$$

ahol $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad (x > 0)$ a jól ismert gamma-függvény és (a komplex logaritmus) $\log \xi := |\xi| + \imath \arg \xi \quad (0 \neq \xi \in \mathbf{C},\ \arg \xi \in (-\pi, \pi])$ segítségével

$$z^\lambda := e^{\lambda \log z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \log z)^k}{k!} \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C}, \lambda \in \mathbf{C}).$$

Mivel $0 < x \in \mathbf{R}$ esetén (egyszerű helyettesítéssel)

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-tx} dt = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}},$$

ezért $(0, +\infty) \subset \mathcal{D}_{Lh_\alpha}$. Következésképpen a 2.1. Tétel alapján bármely $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z > 0$ komplex számra is $z \in \mathcal{D}_{Lh_\alpha}$. Legyen tehát $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z > 0$ és határozzuk meg $Lh_\alpha(z)$-t. Az előbbiek szerint elegendő már csak a $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ esettel foglalkoznunk, amikor is $\arg z \neq 0$, pl. $\arg z > 0$. (Az $\arg z < 0$ eset analóg módon kezelhető.) Ehhez az

$$\int_0^{+\infty} e^{-tz} t^\alpha\, dt = \lim_{c \to 0, b \to +\infty} \int_c^b e^{-tz} t^\alpha\, dt$$

integrált kell kiszámítanunk. Ha $0 < c < b$ és $\varphi_{b,c}(t) := tz \quad (c \leq t \leq b)$, akkor

$$\int_{\varphi_{b,c}} e^{-\xi} \xi^\alpha\, d\xi = \int_c^b e^{-tz} (tz)^\alpha z\, dt = z^{\alpha+1} \int_c^b e^{-tz} t^\alpha\, dt.$$

Legyen $\Phi_{b,c}$ a

$$\psi_{b,c}(t) := t \quad (c \leq t \leq b|z|)\ ,\ K_b(t) := b|z|e^{\imath t} \quad (0 \leq t \leq \arg z),$$

$$k_c(t) := c|z|e^{\imath(\arg z - t)} \quad (0 \leq t \leq \arg z)\ ,\ \tilde{\varphi}_{b,c}(t) := (b + c - t)z \quad c \leq t \leq b)$$

komplex utak egyesítése. Ekkor a *Cauchy*-tétel miatt

$$0 = \int_{\Phi_{b,c}} e^{-\xi} \xi^\alpha\, d\xi = -\int_{\varphi_{b,c}} e^{-\xi} \xi^\alpha\, d\xi + \int_{\psi_{b,c}} e^{-\xi} \xi^\alpha\, d\xi + \int_{K_b} e^{-\xi} \xi^\alpha\, d\xi + \int_{k_c} e^{-\xi} \xi^\alpha\, d\xi,$$

azaz

$$\int_{\varphi_{b,c}} e^{-\xi}\xi^{\alpha}\,d\xi = \int_c^{b|z|} e^{-t}t^{\alpha}\,dt + \int_{K_b} e^{-\xi}\xi^{\alpha}\,d\xi + \int_{k_c} e^{-\xi}\xi^{\alpha}\,d\xi.$$

Mivel (könnyen láthatóan)

$$\int_{K_b} e^{-\xi}\xi^{\alpha}\,d\xi \to 0 \quad (b \to +\infty)\ ,\ \int_{k_c} e^{-\xi}\xi^{\alpha}\,d\xi \to 0 \quad (c \to 0),$$

ezért

$$\lim_{c\to 0, b\to +\infty} \int_{\varphi_{b,c}} e^{-\xi}\xi^{\alpha}\,d\xi = \lim_{c\to 0, b\to +\infty} \int_c^{b|z|} e^{-t}t^{\alpha}\,dt =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha}\,dt = \Gamma(\alpha+1).$$

Tehát

$$\lim_{c\to 0, b\to +\infty} \int_c^{b} e^{-tz}t^{\alpha}\,dt = \frac{1}{z^{\alpha+1}} \lim_{c\to 0, b\to +\infty} \int_{\varphi_{b,c}} e^{-\xi}\xi^{\alpha}\,d\xi = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}.$$

Ha $\alpha := n \in \mathbf{N}$, akkor $\Gamma(\alpha+1) = n!$, azaz visszakapjuk a iii) megjegyzés elején mondottakat. Megjegyezzük, hogy (ld. majd 4.3. Tétel) Lh_α analitikus függvény. Ugyanakkor az elemi úton kiszámított $Ly_\alpha(x) = \Gamma(\alpha+1)/x^{\alpha+1}$ $\quad (0 < x \in \mathbf{R})$ leszűkítésnek egyértelműen létezik analitikus folytatása a $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$ félsíkra, márpedig a $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re} z > 0\} \ni z \mapsto \Gamma(\alpha+1)/z^{\alpha+1}$ hozzárendelés egy ilyen kiterjesztés. Sőt, ebből a szempontból nem lényeges, hogy az $\alpha > -1$ kitevő valós, mindez elmondható $\alpha \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$ esetén is. Ti. ha α ilyen és $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\,z > 0$, akkor

$$\left|t^{\alpha}e^{-tz}\right| = t^{\mathrm{Re}\,\alpha}e^{-t\cdot \mathrm{Re}\,z} \qquad (t > 0)$$

miatt az $\int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-tz}dt$ integrál abszolút konvergens, így létezik $Lh_\alpha(z)$. Hasonlóan, ha $\lambda \in \mathbf{C}$ és $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, akkor

$$\left|t^{\lambda-1}e^{-t}\right| = t^{\mathrm{Re}\,\lambda-1}e^{-t} \qquad (t > 0)$$

miatt az $\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-t}dt$ integrál is abszolút konvergens, azaz a gamma-függvény is analitikusan folytatható a pozitív félegyenesről a $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$ fésíkra. Továbbá az

$Ly_\alpha(x) = \Gamma(\alpha+1)/x^{\alpha+1} \quad (0 < x \in \mathbf{R})$ egyenlőség ugyanúgy adódik, mint $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén, így az analitikus folytatás révén azt kapjuk, hogy az $\alpha \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\alpha > -1$ kitevővel is $Ly_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1)/z^{\alpha+1} \quad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 0)$.

3.4. Hasonlóan számíthatjuk ki az $f(t) := t^n e^t \quad (t \geq 0, n \in \mathbf{N})$ függvény *Laplace*-transzformáltját:

$$Lf(z) = \frac{n!}{(z-1)^{n+1}} \qquad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 1).$$

Ugyanis, ha $n = 0$, akkor

$$Lf(z) = L\exp(z) = \int_0^{+\infty} e^t e^{-tz}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(z-1)}\,dt =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-t(z-1)}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \left(\left[-\frac{e^{-t(z-1)}}{z-1} \right]_0^b \right) = \frac{1}{z-1} \qquad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 1).$$

Az $n \to n+1$ „öröklődés” igazolása:

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^t e^{-tz}\,dt = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t(z-1)}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \left(\int_0^b t^{n+1} e^{-t(z-1)}\,dt \right) =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left(\left[-\frac{t^{n+1} e^{-t(z-1)}}{z-1} \right]_0^b + \frac{n+1}{z-1} \int_0^b t^n e^{-t(z-1)}\,dt \right) =$$

$$\frac{n+1}{z-1} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t(z-1)}\,dt = \frac{n+1}{z-1} \frac{n!}{(z-1)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(z-1)^{n+2}}.$$

3.5. Tekintsük azt az 1-szerint periodikus F függényt („négyszög-jelet”), amelyre

$$F(t) := \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 1/2) \\ 0 & (1/2 \leq t < 1) \end{cases}$$

és legyen $f(t) := F(t) \quad (t \geq 0)$. Ekkor bármely $b > 1$ esetén egyértelműen van olyan $n \in \mathbf{N}$, amelyre $n \leq b < n+1$. Két eset lehetséges:

1^o $b < n + 1/2$, ekkor tetszőleges $0 \neq z \in \mathbf{C}$ mellett

$$\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1/2} e^{-tz}\,dt + \int_n^b e^{-tz}\,dt =$$

$$-\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-(k+1/2)z} - e^{-kz}\right) - \frac{1}{z}\left(e^{-bz} - e^{-nz}\right) =$$

$$\frac{1-e^{-z/2}}{z}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-kz} - \frac{1}{z}\left(e^{-bz} - e^{-nz}\right),$$

ahol $\operatorname{Re} z > 0$ esetén

$$\frac{1-e^{-z/2}}{z}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-kz} - \frac{1}{z}\left(e^{-bz} - e^{-nz}\right) \to$$

$$\frac{1-e^{-z/2}}{z(1-e^{-z})} = \frac{1}{z(1+e^{-z/2})} \qquad (b \to +\infty).$$

2^o $b \geq n + 1/2$, ekkor tetszőleges $0 \neq z \in \mathbf{C}$ mellett az 1^o esettel analóg módon

$$\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1/2} e^{-tz}\,dt \to \frac{1}{z(1+e^{-z/2})} \qquad (b \to +\infty).$$

Összefoglalva azt kaptuk, hogy $Lf(z) = \dfrac{1}{z(1+e^{-z/2})} \qquad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 0)$.

3.6. Legyen $0 \neq \omega \in \mathbf{R}$, ekkor a $0 \leq t \mapsto \sin(\omega t)$, $0 \leq t \mapsto \cos(\omega t)$ függvények *Laplace*-transzformáltjai is könnyen kiszámíthatók. Pl.

$$\int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \sin(\omega t)e^{-tz}\,dt,$$

ahol $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ esetén

$$\int_0^b \sin(\omega t)e^{-tz}\,dt = -\left[\frac{\sin(\omega t)e^{-tz}}{z}\right]_0^b + \frac{\omega}{z}\int_0^b \cos(\omega t)e^{-tz}\,dt =$$

$$-\frac{\sin(\omega b)e^{-bz}}{z} - \frac{\omega}{z}\left[\frac{\cos(\omega t)e^{-tz}}{z}\right]_0^b - \frac{\omega^2}{z^2}\int_0^b \sin(\omega t)e^{-tz}\,dt =$$

$$-\frac{\sin(\omega b)e^{-bz}}{z} - \frac{\omega\cos(\omega b)e^{-bz} - \omega}{z^2} - \frac{\omega^2}{z^2}\int_0^b \sin(\omega t)e^{-tz}\,dt,$$

azaz

$$\int_0^b \sin(\omega t)e^{-tz}\,dt =$$

$$\frac{z^2}{\omega^2+z^2}\,\frac{\omega - \omega\cos(\omega b)e^{-bz} - z\sin(\omega b)e^{-bz}}{z^2} \to \frac{\omega}{\omega^2+z^2} \qquad (b \to +\infty).$$

Tehát az $s_\omega(t) := \sin(\omega t) \quad (t \geq 0)$ esetben

$$Ls_\omega(z) = \frac{\omega}{\omega^2+z^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy a $c_\omega(t) := \cos(\omega t) \quad (t \geq 0)$ függvényre

$$Lc_\omega(z) = \frac{z}{\omega^2+z^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0).$$

3.1. Megjegyzések.

i) Tekintsük az $f, g \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényeket, legyen $U \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ és $x_0 \in U'$ (azaz x_0 torlódási pontja az U halmaznak). Azt mondjuk, hogy a g függvény az f függvény *aszimptotikus közelítése az U halmazon x_0 körül,* ha van olyan $\varepsilon \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény, amellyel $\lim_{U \ni x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ és

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) \qquad (x \in U).$$

Mindezt az $f(x) \sim g(x) \quad (U \ni x \to x_0)$ szimbólummal fogjuk jelölni. Ha pl. a szóban forgó függvények valós változósak, akkor az U halmaz szerepét gyakran egy intervallum játssza (ami $x_0 = +\infty$ esetén egy félegyenes). A komplex változós esetben, ha mondjuk $x_0 = \infty$, akkor lehet pl. $U = \{z \in \mathbf{C} : |\arg z| < \tau, |z| > 1\}$ (ahol $0 \leq \tau < \pi/2$). Speciálisan, ha $g \equiv \alpha$ egy konstans függvény, akkor $f(x) \sim g(x) \quad (U \ni x \to x_0)$ azzal ekvivalens, hogy $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$.

Az aszimptotikus közelítésekben sokszor nem egy g függvényre, hanem egy (g_n) függvénysorozatra van szükség, amelynek a tagjai „egyre jobban” közelítik az f függvényt az alábbi értelemben:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} g_k(x) = g_n(x) + \varepsilon_n(x) g_n(x) \qquad (x \in U, n \in \mathbf{N}),$$

ahol $\lim_{U \ni x \to x_0} \varepsilon_j(x) = 0 \quad (j \in \mathbf{N})$. Tehát $f(x) \sim g_0(x)$, $f(x) - g_0(x) \sim g_1(x)$, $f(x) - g_0(x) - g_1(x) \sim g_2(x) \quad (U \ni x \to x_0)$, és í.t. Erre a szituációra az

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \qquad (U \ni x \to x_0)$$

jelölést használjuk a továbbiakban, és azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ sor az f függvény *aszimptotikus kifejtése az* U *halmazon* x_0 *körül.* (Hangsúlyozzuk, hogy maga a függvénysor nem feltétlenül konvergens az itt szereplő x helyeken, pusztán az $f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \quad (n \in \mathbf{N})$ közelítés nagyságrendi becsléséről van szó.)

ii) (*Watson*-lemma.) Legyenek adottak a $b_n, \alpha_n \in \mathbf{C} \quad (n \in \mathbf{N})$ számok, ahol $-1 < \operatorname{Re}\alpha_1 < \operatorname{Re}\alpha_2 < \ldots < \operatorname{Re}\alpha_n < \ldots$ és a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{\alpha_k}$ sor aszimptotikus kifejtése az $f \in \mathcal{D}_L$ függvénynek a 0 pont körül a $(0, +\infty)$ halmazon. Ekkor tetszőleges $0 < \tau < \pi/2$ mellett

$$Lf(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \Gamma(\alpha_k + 1)}{z^{\alpha_k + 1}} \qquad (0 \neq z \to \infty,\ |\arg z| < \pi/2 - \tau).$$

Tekintsük ui. az

$$f_n(t) := f(t) - \sum_{k=0}^{n} b_k t^{\alpha_k} \qquad (t \geq 0, n \in \mathbf{N})$$

függvényeket. Ekkor (ld. 3.3. példa) alkalmas $q > 0$ esetén

$$Lf(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k \Gamma(\alpha_k + 1)}{z^{\alpha_k + 1}} + Lf_n(z) \qquad (n \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > q).$$

Az f-re tett feltételek miatt (amikor is (ld. i)) $g_k(t) := b_k t^{\alpha_k} \quad (k \in \mathbf{N}, t \geq 0)$) tudjuk, hogy $f_{n-1}(t) \sim b_n t^{\alpha_n} \quad (0 < t \to 0)$. Következésképpen tetszőleges $\varepsilon > 0$

számhoz van olyan $\delta_n > 0$, amellyel (az $\alpha_n = a_n + \imath c_n \quad (a_n, c_n \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$ jelölésekkel)

$$|f_n(t)| \leq \varepsilon \, |b_n t^{\alpha_n}| = \varepsilon |b_n| t^{a_n} \qquad (0 < t < \delta_n).$$

Legyen $q < x \in \mathbf{R}$, ekkor létezik $Lf_n(x) \quad (n \in \mathbf{N})$, azaz az $\int_0^{+\infty} f_n(t)e^{-tx}dt$ integrál konvergens. Ezért minden $\mathbf{N} \ni n$-re a

$$\varphi_n(t) := \int_{\delta_n}^{t} f_n(y)e^{-yx}dy \qquad (t \geq \delta_n)$$

függvény korlátos: $B_n := \sup_{t \geq \delta_n} |\varphi_n(t)| < +\infty$. Az f_n függvények lokálisan integrálhatók, így a φ_n függvények majdnem mindenütt differenciálhatók és $\varphi_n'(t) = f_n(t)e^{-tx} \quad$ (m.m. $t \geq \delta_n \quad (n \in \mathbf{N})$). Következésképpen parciális integrálással azt kapjuk, hogy bármely $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > x$ helyen $\varphi_n(\delta_n) = 0$ $(n \in \mathbf{N})$, ill.

$$\lim_{b \to +\infty} \left| e^{-b(z-x)} \varphi_n(b) \right| \leq B_n \lim_{b \to +\infty} e^{-b(\operatorname{Re} z - x)} = 0$$

miatt

$$\left| \int_{\delta_n}^{+\infty} f_n(t)e^{-tz}dt \right| = \left| \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-t(z-x)} f_n(t)e^{-xt}dt \right| = \left| \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-t(z-x)} \varphi_n'(t)dt \right| =$$

$$\left| \lim_{b \to +\infty} e^{-b(z-x)} \varphi_n(b) - e^{-\delta_n(z-x)} \varphi_n(\delta_n) - (x-z) \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-t(z-x)} \varphi_n(t)dt \right| =$$

$$|x - z| \left| \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-t(z-x)} \varphi_n(t)dt \right| \leq$$

$$B_n |x - z| \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-t(\operatorname{Re} z - x)}dt = \frac{B_n |z - x|}{\operatorname{Re} z - x} e^{-\delta_n(\operatorname{Re} z - x)}.$$

Mivel a $|z| \to +\infty$, $|\arg z| < \pi/2 - \tau$ határátmenetet vizsgáljuk (ahol $\operatorname{Re} z > x$), ezért alkalmas $C > 0$ esetén az előbb mondott z-kről már az is feltehető, hogy $|z - x| \leq C(\operatorname{Re} z - x)$, azaz $|z| \to +\infty$ miatt egyúttal $\operatorname{Re} z \to +\infty$ is teljesül. Tehát

$$\left| \int_{\delta_n}^{+\infty} f_n(t)e^{-tz}dt \right| \leq CB_n e^{-\delta_n(\operatorname{Re} z - x)}.$$

Ugyanakkor egy $\beta > 0$ együtthatóval a $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > x$, $|\arg z| < \pi/2 - \tau$ komplex számokra $|\operatorname{Re} z| \le |z| \le \beta |\operatorname{Re} z|$, így

$$\left|\int_0^{\delta_n} f_n(t)e^{-tz}dt\right| \le \varepsilon |b_n| \int_0^{\delta_n} t^{a_n} e^{-t\operatorname{Re} z}dt =$$

$$\frac{\varepsilon |b_n|}{(\operatorname{Re} z)^{1+a_n}} \int_0^{\delta_n \operatorname{Re} z} y^{a_n} e^{-y} dy \le \frac{\varepsilon |b_n|}{(\operatorname{Re} z)^{1+a_n}} \int_0^{+\infty} y^{a_n} e^{-y} dy =$$

$$\frac{\varepsilon |b_n| \Gamma(1+a_n)}{(\operatorname{Re} z)^{1+a_n}} \le \frac{\beta^{1+a_n} \varepsilon |b_n| \Gamma(1+a_n)}{|z|^{1+a_n}} =: \frac{C_n \varepsilon}{|z|^{1+a_n}}.$$

Világos tehát, hogy az előbbiekben említett $z \in \mathbf{C}$ pontokban

$$|Lf_n(z)| = \left|\int_0^{+\infty} f_n(t)e^{-tz}dt\right| \le CB_n e^{-\delta_n(\operatorname{Re} z - x)} + \frac{C_n \varepsilon}{|z|^{1+a_n}},$$

azaz

$$|Lf_n(z) z^{1+\alpha_n}| \le CB_n e^{-\delta_n(\operatorname{Re} z - x)} |z^{1+\alpha_n}| + C_n \varepsilon \frac{|z^{1+\alpha_n}|}{|z|^{1+a_n}} \le$$

$$CB_n e^{\delta_n x + |c_n|\pi/2} e^{-\delta_n \operatorname{Re} z} |z|^{1+a_n} + C_n \varepsilon e^{|c_n|\pi/2}.$$

Mivel a szóban forgó z helyeken

$$e^{-\delta_n \operatorname{Re} z} |z|^{1+a_n} \to 0 \qquad (z \to \infty),$$

ezért mindez a *Watson*-lemma bizonyítását jelenti.

iii) Azt láttuk be, hogy ha $f \in \mathcal{D}_L$ és $f(t) \sim At^\alpha$ $((0,+\infty) \ni t \to 0)$ valamilyen $A, \alpha \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} \alpha > -1$ komplex számokkal, akkor tetszőleges $0 < \tau < \pi/2$ mellett

$$(*) \qquad Lf(z) \sim A \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}} \qquad (0 \ne z \to \infty,\ |\arg z| < \pi/2 - \tau).$$

Az $\alpha := 0$ esetben az f-re tett feltétel azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{D}_L$ és létezik a (véges) $A := \lim_{t\to 0} f(t)$ határérték. Ekkor tehát

$$Lf(z) \sim \frac{A}{z} \qquad (0 \ne z \to \infty,\ |\arg z| < \pi/2 - \tau),$$

azaz $zLf(z) \to A \quad (0 \neq z \to \infty, |\arg z| < \pi/2 - \tau)$. Megjegyezzük, hogy $(*)$-ból a *Watson*-lemma is egyszerűen következik. Ui. (az ottani jelölésekkel és feltételekkel)

$$f_n(t) \sim b_{n+1} t^{\alpha_{n+1}} \qquad (0 < t \to 0, n \in \mathbf{N}),$$

azaz $(*)$ szerint $0 \neq z \to \infty$, $|\arg z| < \pi/2 - \tau$ esetén

$$Lf_n(z) = Lf(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k \Gamma(\alpha_k + 1)}{z^{\alpha_k + 1}} \sim \frac{b_{n+1}\Gamma(\alpha_{n+1}+1)}{z^{\alpha_{n+1}+1}}.$$

iv) A iii) megjegyzésben megfogalmazott állítás messzemenően általánosítható. Tegyük fel ui., hogy az $f, g \in \mathcal{D}_L$ függvényekre az alábbiak teljesülnek:

1^o van olyan $T > 0$, hogy $g(t) \neq 0$ és g folytonos t-ben $\quad (0 < t \leq T)$,

2^o $f(t) \sim Ag(t) \; (0 < t \to 0)$ valamilyen $A \in \mathbf{C}$ konstanssal,

3^o $|g| \in \mathcal{D}_L$ és egy alkalmas $x_0 > 0$ mellett $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > x\} \subset \mathcal{D}_{Lf} \cap \mathcal{D}_{L(|g|)}$,

4^o vannak olyan pozitív C, x_1, ill. $0 \leq \tau < \pi/2$ állandók, amelyekkel

$$L(|g|)(x) \leq C|Lg(z)| \qquad (z \in \mathbf{C},\ |\arg z| \leq \tau, \operatorname{Re} z = x > x_1).$$

Ekkor $Lf(z) \sim ALg(z) \; (z \to \infty,\ |\arg z| < \pi/2 - \tau)$.

Nem nehéz megmutatni (amit a fentiekben lényegében be is láttunk), hogy a $g(t) := t^\alpha \quad (t > 0,\ \alpha \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re}\alpha > -1)$ függvény teljesíti a 4^o feltételt.

v) Az előbbi megjegyzés mintegy „tükörképeként” lássuk be, hogy ha $f : [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ (*Lebesgue*-)mérhető és $f \sim At^\alpha \quad ((0,+\infty) \ni t \to +\infty)$ valamilyen $A, \alpha \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\alpha > -1$ komplex számokkal, akkor $f \in \mathcal{D}_L$, továbbá $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \subset \mathcal{D}_{Lf}$ és tetszőleges $0 < \tau < \pi/2$ mellett

$$Lf(z) \sim A\frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}} \qquad (0 \neq z \to 0,\ |\arg z| < \pi/2 - \tau).$$

Ti. az f-re tett feltétel miatt van olyan $\varepsilon : [1, +\infty) \to \mathbf{C}$ függvény, amelyre $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$ és

$$f(t) = At^\alpha + \varepsilon(t)t^\alpha \qquad (t \geq 1).$$

Innen $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \subset \mathcal{D}_{Lf}$ már nyilván egyszerűen következik. Legyen $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ és válasszuk a $T \geq 1$ számot tetszőlegesen. Ekkor

$$Lf(z) = \int_0^T f(t)e^{-tz}dt + \int_T^{+\infty} (At^\alpha + \varepsilon(t)t^\alpha)e^{-tz}dt =$$

$$\int_0^T (f(t) - At^\alpha)e^{-tz}dt + A\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-tz}dt + \int_T^{+\infty} \varepsilon(t)t^\alpha e^{-tz}dt =$$

$$A\frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}} + \int_0^T (f(t) - At^\alpha)e^{-tz}dt + \int_T^{+\infty} \varepsilon(t)t^\alpha e^{-tz}dt.$$

Legyen $\delta > 0$ és $T \geq 1$ olyan „nagy”, hogy $|\varepsilon(t)| \leq \delta \quad (t \geq T)$. Ha $\alpha = a + \imath b$ $(a, b \in \mathbf{R})$, akkor

$$\left|\int_T^{+\infty} \varepsilon(t)t^\alpha e^{-tz}dt\right| \leq \delta\int_0^{+\infty} t^a e^{-t\,\mathrm{Re}\,z}dt = \delta\frac{\Gamma(a+1)}{(\mathrm{Re}\,z)^{a+1}}$$

és

$$\left|\int_0^T (f(t) - At^\alpha)e^{-tz}dt\right| \leq \int_0^T (|f(t)| + |A|t^a)\,dt =: K$$

(ahol tehát K egy, a z-től független konstans). Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy

$$\left|Lf(z) - A\frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}\right| \leq K + \delta\frac{\Gamma(a+1)}{(\mathrm{Re}\,z)^{a+1}},$$

vagy ugyanez másképp kifejezve

$$\left|\frac{Lf(z)z^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} - A\right| \leq K\frac{|z^{\alpha+1}|}{|\Gamma(\alpha+1)|} + \delta\frac{\Gamma(a+1)}{|\Gamma(\alpha+1)|}\frac{|z^{\alpha+1}|}{(\mathrm{Re}\,z)^{a+1}}.$$

Ha itt a $z = |z|e^{\imath\omega}$ $(|\omega| < \pi/2)$ alakot használjuk, akkor

$$|z^\alpha| = e^{a\ln|z| - b\omega} = |z|^a e^{-b\omega}$$

és

$$\left|\frac{Lf(z)z^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} - A\right| \leq \frac{K|z|^{a+1}e^{-b\omega}}{|\Gamma(\alpha+1)|} + \delta\frac{\Gamma(a+1)}{|\Gamma(\alpha+1)|}\left(\frac{|z|}{\mathrm{Re}\,z}\right)^{a+1} e^{-b\omega}.$$

Mivel $|\arg z| = |\omega| < \tau < \pi/2$, ezért

$$\frac{|z|}{\operatorname{Re} z} < \frac{1}{\cos\tau} \quad , \quad e^{-b\omega} < e^{|b|\tau}.$$

Továbbá legyen a $\rho > 0$ szám olyan „kicsi”, hogy $|z| < \rho$ esetén $|z|^{a+1} < \delta$ teljesüljön (ilyen ρ van, mivel $a > -1$). Ekkor a fentiek szerint

$$\left|\frac{Lf(z)z^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} - A\right| \le \delta\left(\frac{Ke^{|b|\tau}}{|\Gamma(\alpha+1)|} + \frac{\Gamma(a+1)}{|\Gamma(\alpha+1)|}\frac{e^{b\tau}}{(\cos\tau)^{a+1}}\right),$$

ami azt jelenti, hogy

$$Lf(z)\cdot\frac{z^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \to A \qquad (0 \ne z \to 0, |\arg z| < \tau).$$

vi) Ha v)-ben $\alpha := 0$-t írunk, akkor az f-re tett feltétel azzal ekvivalens, hogy létezik az $A := \lim_{t\to+\infty} f(t)$ (véges) határérték. Ekkor

$$Lf(z) \sim \frac{A}{z} \qquad (0 \ne z \to 0,\ |\arg z| < \pi/2 - \tau),$$

azaz, ha létezik a (véges) $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ határérték, akkor $\lim_{x\to0}(xLf(x))$ is létezik és

$$\lim_{x\to0}(xLf(x)) = \lim_{t\to+\infty} f(t).$$

A most mondottak nem „megfordíthatók”, amint azt az alábbi példa mutatja: $f(t) := \sin t \ \ (t \ge 0)$. Ekkor (ld. 3.6.) $Lf(z) = 1/(z^2+1) \quad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 0)$, azaz $\lim_{x\to0}(xLf(x)) = 0$. Ugyanakkor f-nek nincs határértéke a $+\infty$-ben.

vii) A *Watson*-lemmában szereplő $Lf(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k\Gamma(\alpha_k+1)/z^{\alpha_k+1}$ formula jobb oldalán álló összeg formálisan az L *Laplace*-operátornak az $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{\alpha_k}$ aszimptotikus kifejtés jobb oldalára való tagonkénti alkalmazásával adódik. Hangsúlyozzuk, hogy ebben a megfogalmazásban pusztán formalizmusról van szó: még $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{\alpha_k} \quad (t \ge 0)$ esetén sem biztos, hogy Lf számítható „tagonként” az előbbi értelemben. Ennek az alátámasztására tekintsük ui. a következő példát:

$$f(t) := e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k} \qquad (t \ge 0).$$

Világos, hogy bármely $z \in \mathbf{C}$ helyen az $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt$ improprius integrál (abszolút) konvergens, azaz $\mathcal{D}_{Lf} = \mathbf{C}$. Ugyanakkor (ld. fent) a

$$\sum_{k=0}^{\infty} Lf_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{k!} \frac{1}{z^{2k+1}}$$

sor bármely $\mathbf{C} \ni z$-re divergens.

4. A Laplace-transzformált tulajdonágai.

4.1. Tétel.

Tetszőleges $f, g \in \mathcal{D}_L, \alpha, \beta \in \mathbf{C}$ esetén

i) $L(\alpha f + \beta g)(z) = \alpha Lf(z) + \beta Lg(z) \quad (z \in \mathcal{D}_{Lf} \cap \mathcal{D}_{Lg})$;

ii) $L(\exp^\alpha f)(z) = Lf(z-\alpha) \quad (z - \alpha \in \mathcal{D}_{Lf})$;

iii) *ha van olyan $T > 0$, hogy $f(t+T) = f(t) \quad (t \geq 0)$, akkor*

$$\left(1 - e^{-Tz}\right) Lf(z) = \int_0^T f(t)e^{-tz}\,dt \qquad (z \in \mathcal{D}_{Lf}).$$

Bizonyítás. Az i) állítás meglehetősen triviális. A ii) bizonyításához legyen $z \in \mathbf{C}$ olyan, hogy $z - \alpha \in \mathcal{D}_{Lf}$, ekkor

$$L(\exp^\alpha f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} f(t)e^{-tz}\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t(z-\alpha)}\,dt = Lf(z-\alpha).$$

Végül számoljuk ki a iii)-beli feltételek mellett $Lf(z)$-t $\quad (z \in \mathcal{D}_{Lf})$:

$$Lf(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{nT} f(t)e^{-tz}\,dt.$$

Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$, ekkor

$$\int_0^{nT} f(t)e^{-tz}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-tz}\,dt =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^T f(t+kT)e^{-(t+kT)z}\,dt = \int_0^T f(t)e^{-tz}\,dt \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kTz}.$$

Ha $\int_0^T f(t)e^{-tz}\,dt = 0$, akkor tehát $Lf(z) = 0$ és iii) nyilván igaz. Ha $\int_0^T f(t)e^{-tz}\,dt$ nem nulla, akkor léteznie kell a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kTz} \in \mathbf{C}$ határértéknek, azaz $\mathrm{Re}\, z > 0$ és $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kTz} = \dfrac{1}{1-e^{-Tz}}$, ill. iii) következik. ■

4.1. Megjegyzések.

i) Példaként legyen rendre $f(t) := h_n(t) = t^n \quad (n \in \mathbf{N}, t \geq 0)$, $f := s_\omega$ vagy $f := c_\omega$ $(0 \neq \omega \in \mathbf{R})$. Ekkor a 4.1. Tétel ii) állítása (és 3. fejezet példái) szerint (közvetlen számolással is könnyen ellenőrizhetően)

$$L(\exp^\alpha f)(z) = \int_0^{+\infty} t^n e^{\alpha t} e^{-tz} dt = \frac{n!}{(z-\alpha)^{n+1}} \qquad (\mathrm{Re}\, z > \ \mathrm{Re}\, \alpha),$$

$$L(\exp^\alpha s_\omega)(z) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} \sin(\omega t) e^{-tz} dt = \frac{\omega}{\omega^2 + (z-\alpha)^2} \qquad (\mathrm{Re}\, z > \ \mathrm{Re}\, \alpha),$$

$$L(\exp^\alpha c_\omega)(z) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} \cos(\omega t) e^{-tz} dt = \frac{z-\alpha}{\omega^2 + (z-\alpha)^2} \qquad (\mathrm{Re}\, z > \ \mathrm{Re}\, \alpha).$$

ii) A 4.1. Tétel iii) állítását is illusztráljuk az alábbi (elemi úton is könnyen kiszámolható) példával:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t) e^{-tz} dt = \frac{\omega(1 - e^{-2\pi z/\omega})}{\omega^2 + z^2} \qquad (0 \neq \omega \in \mathbf{R},\ \mathrm{Re}\, z > 0).$$

Valóban, ha az említett iii) állításban $f := s_\omega$, akkor T helyébe írható $2\pi/\omega$, ezért az Ls_ω-ra vonatkozó formula (ld. 3.6.) alapján kapjuk a fenti öszefüggést.

iii) Az előbb bebizonyított 4.1. Tétel i) állítása szerint a *Laplace*-transzformáció *additív* az alábbi értelemben: ha valamilyen $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ és $f_k \in \mathcal{D}_L$, $(k = 0, ..., n)$ esetén $\{\xi \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, \xi > x\} \subset \mathcal{D}_{Lf_k} \quad (k = 0, ..., n)$, akkor

$$L\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)(z) = \sum_{k=0}^{n} Lf_k(z) \qquad (z \in \{\xi \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, \xi > x\}).$$

Bizonyos megszorítások mellett ez az additivitási tulajdonság igaz marad „végtelen összegekre” is. Nevezetesen, tegyük fel, hogy az $f_k \in \mathcal{D}_L^{\exp} \quad (k \in \mathbf{N})$ függvényekre a következő feltételek teljesülnek:

1^o valamilyen $x \in \mathbf{R}$ „abszcisszával” léteznek a $\rho_k := \int_0^{+\infty} |f_k(t)|e^{-tx} dt < +\infty$ $(k \in \mathbf{N})$ számok (azaz egyúttal a $\mathcal{D} := \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq x\}$ zárt félsíkra igaz, hogy $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{Lf_k} \quad (k \in \mathbf{N})$),

2^o $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k < +\infty$.

Ekkor a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ függvénysor m.m. $t \geq 0$ esetén abszolút konvergens, az $f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \quad (\text{m.m.}\, t \geq 0)$ függvényre pedig $f \in \mathcal{D}_L$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{Lf}$ és

$$Lf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Lf_k(z) \qquad (z \in \mathcal{D})$$

teljesül, ahol az $Lf(z)$-t meghatározó improprius integrál minden $z \in \mathcal{D}$ helyen abszolút konvergens. (Megjegyezzük, hogy

$$|Lf_k(z)| \leq \int_0^{+\infty} |f_k(t)| \left|e^{-tz}\right| dt = \int_0^{+\infty} |f_k(t)| e^{-t \operatorname{Re} z} dt \leq$$

$$\int_0^{+\infty} |f_k(t)| e^{-tx} dt = \rho_k \qquad (k \in \mathbf{N}, z \in \mathcal{D})$$

miatt 2^o-ből rögtön következik a $\sum_{k=0}^{\infty} Lf_k$ sor abszolút és egyenletes konvergenciája.)

A iii) megjegyzésünk igazolásához legyen $\Phi(t) := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tx}|f_k(t)| \quad (t \geq 0)$ és vegyük észre, hogy a Φ függvényre

$$\int_0^{+\infty} \Phi(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} |f_k(t)| e^{-tx} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k < +\infty,$$

azaz $\Phi \in L^1[0, +\infty)$. Ezért m.m. $t \geq 0$ esetén $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(t)| e^{-tx} < +\infty$, amiből ugyanez következik persze a $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(t)| < +\infty$ sorra is. Ez azt jelenti, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ végtelen sor m.m. $0 \leq t$-re abszolút konvergens. Legyen $f := \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, ekkor f (*Lebesgue*-)mérhető és bármely $b > 0$ mellett egy alkalmas $C_b > 0$ konstanssal

$$\int_0^b |f(t)|\, dt \leq C_b \int_0^b |f(t)| e^{-tx} dt \leq C_b \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-tx} dt \leq$$

$$C_b \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_k(t)| e^{-tx}\, dt < +\infty.$$

Más szóval f lokálisan integrálható és

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-tx}\, dt \le \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_k(t)| e^{-tx}\, dt < +\infty$$

alapján $x \in \mathcal{D}_{Lf}$, ill. bármely $z \in \mathcal{D}$ helyen

$$\int_0^{+\infty} |f(t) e^{-tz}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t \operatorname{Re} z} dt \le \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-tx} dt < +\infty.$$

Így $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{Lf}$ és az $Lf(z)$-t meghatározó improprius integrál abszolút konvergens. Továbbá bármely $0 \le t$-re és $\mathbf{N} \ni n$-re

$$|\Phi_n(t)| := \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(t) e^{-tz} \right| \le \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) e^{-tx} = \Phi(t),$$

tehát a $\Phi_n \in L^1[0, +\infty)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatnak van integrálható majoránsa. Ezért az $f(t) e^{-tz} = \lim_{n \to +\infty} \Phi_n(t)$ $(t \ge 0)$ egyenlőség és a *Lebesgue*-tétel szerint

$$Lf(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \Phi_n(t) e^{-tz} dt =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(t) e^{-tz} dt = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} f_k(t) e^{-tz} dt = \sum_{k=0}^{\infty} Lf_k(z).$$

iv) Tekintsük pl. valamilyen $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ kitevő-sorozat, ill. $a_k \in \mathbf{C}$ $(k \in \mathbf{N})$ együttható-sorozat, ill. a $\rho \ge 0$ „küszöb” mellett a $z \in \mathbf{C}$, $|z| > \rho$ helyeken az abszolút konvergens

$$F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{\lambda_k}}$$

sor alakjában előállítható F függvényt. Ekkor $F = Lf$, ahol

$$f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^{\lambda_k - 1}}{\Gamma(\lambda_k)} \qquad (t \geq 0)$$

(ahol az utóbbi sor egyébként bármely $0 \neq t \in \mathbf{C}$ helyen abszolút konvergens). Legyen ui.

$$f_k(t) := a_k \frac{t^{\lambda_k - 1}}{\Gamma(\lambda_k)} \qquad (k \in \mathbf{N}, t \geq 0).$$

Ekkor bármely $x > \rho$ mellett

$$\rho_k := \int_0^{+\infty} |f_k(t)| e^{-tx} dt = \frac{|a_k|}{\Gamma(\lambda_k)} \int_0^{+\infty} t^{\lambda_k - 1} e^{-tx} dt =$$

$$\frac{|a_k|}{x\Gamma(\lambda_k)} \int_0^{+\infty} (t/x)^{\lambda_k - 1} e^{-t} dt = \frac{|a_k|}{x^{\lambda_k}} < +\infty \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

ill. az F-et meghatározó sor feltételezett abszolút konvergenciája miatt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{x^{\lambda_k}} < +\infty.$$

Alkalmazható tehát az előző iii) megjegyzés, ami (ld. 3.3.) az

$$Lh_\alpha(z) = \Gamma(\alpha + 1)/z^{\alpha+1} \qquad (z \in \mathbf{R}, \operatorname{Re} z > 0)$$

(ahol $h_\alpha(t) := t^\alpha \quad (-1 < \alpha \in \mathbf{R}, t > 0)$) egyenlőséget is figyelembe véve az állításunk bizonyítását jelenti.

v) Speciálisan legyen az előző megjegyzésben $\lambda_k := k + 1 \quad (k \in \mathbf{N})$:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}} \qquad (z \in \mathbf{C}, |z| > \rho),$$

ahol $\rho = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ és a szóban forgó sor abszolút konvergens (ld. *Cauchy-Hadamard*-tétel). Ekkor iv) szerint az

$$(*) \qquad f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k \qquad (t \geq 0)$$

függvénnyel $Lf = F$. Világos, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel $|a_k| < (\rho+\varepsilon)^k$ teljesül minden $N \le k \in \mathbf{N}$ mellett, következésképpen egy alkalmas $C > 0$ konstanssal $|a_k| < C(\rho+\varepsilon)^k \quad (k \in \mathbf{N})$. Ezért

$$|f(t)| \le C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho+\varepsilon)^k}{k!} t^k = Ce^{\gamma t} \qquad (t \ge 0)$$

(a $\gamma := \rho + \varepsilon$ paraméterrel). Tehát $\rho \le \gamma$ és (ld. **1.** pont i) megjegyzés) $f \in \mathcal{D}_L^{\gamma}$.

Nyilvánvaló, hogy az f függvényt definiáló előbbi végtelen sor nem csupán $t \ge 0$, hanem tetszőleges $t = z \in \mathbf{C}$ helyen abszolút konvergens. Ebben az értelemben tehát f egy egész függvény, amelyre $|f(z)| \le Ce^{\gamma|z|} \quad (z \in \mathbf{C})$ teljesül. Mindez meg is „fordítható”: tegyük fel ui., hogy az $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ egész függvény a most mondott értelemben exponenciális típusú, azaz alkalmas $C > 0, \gamma > 0$ paraméterekkel $|f(z)| \le Ce^{\gamma|z|} \quad (z \in \mathbf{C})$. Ekkor az f függvény (0-körüli) *Taylor*-sorát $(*)$ alakban írva fel az együtthatóira a következőt kapjuk:

$$\frac{a_k}{k!} = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_r} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\, dz \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

ahol $r > 0$ és $\varphi(\tau) := e^{\imath r \tau} \quad (\tau \in [0, 2\pi])$. Innen az $M_r := \max_{|z|=r} |f(z)|$ jelöléssel azonnal következik az alábbi becslés:

$$\frac{|a_k|}{k!} \le \frac{M_r}{r^k} \le C\frac{e^{\gamma r}}{r^k} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ha itt $r := k/\gamma$, akkor

$$\sqrt[k]{|a_k|} \le \frac{\gamma \cdot e}{k} \sqrt[k]{Ck!} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Az ismert $\lim_{k\to\infty}(\sqrt[k]{Ck!}/k) = 1/e$ összefüggés alapján ebből

$$\rho = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \le \gamma < +\infty$$

adódik.

vi) A 3.1. v) megjegyzésre és a 4.1. Tétel ii) állítására hivatkozva fennáll a következő aszimptotikus közelítés: ha $f : [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ (*Lebesgue*-)mérhető és $f \sim Ae^{\xi t} t^{\alpha} \quad ((0, +\infty) \ni t \to +\infty)$ valamilyen $A, \xi, \alpha \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, \alpha > -1$ komplex számokkal, akkor $f \in \mathcal{D}_L$, továbbá $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, \xi\} \subset \mathcal{D}_{Lf}$ és tetszőleges $0 < \tau < \pi/2$ mellett

$$Lf(z) \sim A\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(z-\xi)^{\alpha+1}} \qquad (0 \neq z \to 0,\ |\arg(z-\xi)| < \pi/2 - \tau).$$

4.2. Tétel.

Legyen valamely $f \in \mathcal{D}_L$ és $a > 0, b \geq 0$ esetén

$$\delta_a f(t) := f(at) \ \ , \ \ \Delta_b f(t) := f(t+b) \qquad (t \geq 0),$$

ill.

$$\tau_b f(t) := \begin{cases} f(t-b) & (t \geq b) \\ 0 & (0 \leq t < b). \end{cases}$$

Ekkor

i) $L(\tau_b f)(z) = e^{-bz} Lf(z) \quad (z \in \mathcal{D}_{Lf})$;

ii) $L(\delta_a f)(z) = \frac{1}{a} Lf(z/a) \quad (z/a \in \mathcal{D}_{Lf})$;

iii) $L(\Delta_b f)(z) = e^{bz}\left(Lf(z) - \int_0^b f(t)e^{-tz}dt\right) \quad (z \in \mathcal{D}_{Lf})$.

Bizonyítás. i) Legyen $z \in \mathcal{D}_{Lf}$, ekkor

$$L(\tau_b f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t-b)e^{-tz}\,dt = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c f(t-b)e^{-tz}\,dt =$$

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^{c-b} f(t)e^{-(t+b)z}\,dt =$$

$$e^{-bz}\lim_{c\to+\infty}\int_0^{c-b} f(t)e^{-tz}\,dt = e^{-bz}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}\,dt = e^{-bz}Lf(z).$$

ii) Hasonlóan, ha $z \in \mathbf{C}$ és $z/a \in \mathcal{D}_{Lf}$, akkor

$$L(\delta_a f)(z) = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c f(at)e^{-tz}\,dt = \lim_{c\to+\infty}\int_0^{ac} f(t)e^{-tz/a}\frac{1}{a}\,dt =$$

$$\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz/a}\,dt = \frac{1}{a}Lf(z/a).$$

iii) Végül

$$L(\Delta_b f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t+b)e^{-tz}dt = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c f(t+b)e^{-tz}dt =$$

$$\lim_{c\to+\infty}\int_b^{b+c} f(t)e^{-(t-b)z}dt = e^{bz}\lim_{c\to+\infty}\left(\int_0^{b+c} f(t)e^{-tz}dt - \int_0^b f(t)e^{-tz}dt\right) =$$

$$e^{bz}\left(Lf(z) - \int_0^b f(t)e^{-tz}dt\right). \blacksquare$$

4.2. Megjegyzések.

i) Ha tehát $f \in \mathcal{D}_L, a > 0, b \geq 0$ és

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} f(at-b) & (t \geq b/a) \\ 0 & (0 \leq t < b/a), \end{cases}$$

akkor $L\tilde{f}(z) = \frac{1}{a}e^{-bz/a}Lf(z/a) \quad (z/a \in \mathcal{D}_{Lf})$. Mindez másképp kifejezve: az $F := Lf$ választással legyen

$$f_*(t) := e^{-bt/a}f(t/a) \qquad (t \geq 0),$$

ekkor $F(az+b) = \frac{1}{a}Lf_*(z) \quad (az+b \in \mathcal{D}_F)$.

ii) Legyen pl. $a \in \mathbf{C}$ és $f_a(t) := e^{at} \quad (t \geq 0)$. Ekkor bármely $z \in \mathbf{C}$ és $b > 0$ esetén

$$\int_0^b f_a(t)e^{-tz}\,dt = \int_0^b e^{(a-z)t}\,dt = \begin{cases} b & (a = z) \\ \dfrac{e^{(a-z)b}-1}{a-z} & (a \neq z). \end{cases}$$

Innen világos, hogy $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f_a(t)e^{-tz}\,dt \in \mathbf{C}$ azzal ekvivalens, hogy $\mathrm{Re}\,(a-z) < 0$, azaz $\mathrm{Re}\,z > \mathrm{Re}\,a$ és ekkor $Lf_a(z) = \dfrac{1}{z-a}$.

iii) Nyilvánvaló, hogy az előző megjegyzésbeli f_a függvényre $f_a = \delta_a \exp = \delta_a f_1$. Itt (ld. ii))

$$L\exp(z) = Lf_1(z) = \frac{1}{z-1} \qquad (z \in \mathbf{C},\, \mathrm{Re}\,z > 1),$$

ezért a 4.2. Tétel alapján

$$Lf_a(z) = L\exp(z/a) =$$

$$\frac{1}{a}\frac{1}{z/a-1} = \frac{1}{z-a} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,(z/a) > 1 \iff \mathrm{Re}\,z > \mathrm{Re}\,a).$$

iv) Legyen most valamely $a \in \mathbf{C}$ esetén $g_a(t) := te^{at} \quad (t \geq 0)$. Ekkor azt mondhatjuk, hogy $g_a = h\exp^a$, ahol $h(t) := t \quad (t \geq 0)$. Mivel (ld. 3.3.) $Lh(z) = 1/z^2 \quad (z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\,z > 0)$, ezért a 4.1. Tétel alapján

$$Lg_a(z) = Lh(z-a) = \frac{1}{(z-a)^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,(z-a) > 0 \iff \mathrm{Re}\,z > \mathrm{Re}\,a),$$

amiről közvetlen számolással is könnyen meggyőződhetünk: tetszőleges $b > 0$ mellett

$$\int_0^b g_a(t)e^{-tz}\,dt = \int_0^b te^{t(a-z)}\,dt =$$

$$\begin{cases} b^2/2 & (a = z) \\ \dfrac{be^{b(a-z)}}{a-z} - \dfrac{e^{b(a-z)}}{(z-a)^2} + \dfrac{1}{(z-a)^2} & (a \neq z). \end{cases}$$

Tehát

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b g_a(t)e^{-tz}\,dt \in \mathbf{C} \iff \lim_{b\to+\infty}\frac{be^{b(a-z)}}{a-z} =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{e^{b(a-z)}}{(a-z)^2} = 0 \iff \mathrm{Re}\,z > \mathrm{Re}\,a$$

és ekkor $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b g_a(t)e^{-tz}\,dt = Lg_a(z) = 1/(z-a)^2$.

4.3. Tétel.

Bármely $f \in \mathcal{D}_L, z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > q_f$ *esetén* $Lf \in D^\infty\{z\}$ *és*

$$(Lf)^{(n)}(z) = (-1)^n L(h_n f)(z) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-tz}\, dt \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Bizonyítás. 1^o Teljes indukcióra hivatkozva elegendő az $n = 1$ esetet igazolni, nevezetesen, hogy $Lf \in D\{z\}$ és $(Lf)'(z) = -L(h_1 f)(z) = -\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-tz}\, dt$.

2^o Azt kell tehát megmutatnunk, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{Lf(z+h) - Lf(z)}{h} = -\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-tz}\, dt.$$

Legyen ehhez $z_0 \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z_0 > q_f$ és $\varphi(t) := \int_0^t f(x) e^{-xz_0}\, dx \quad (t \geq 0)$. A 2.1. Tétel bizonyításában mondottak szerint φ korlátos, $[0, b]$-n $(b > 0)$ abszolút folytonos függvény, ill. $z, h \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}(z+h) > \operatorname{Re} z_0$ és $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ esetén

$$Lf(z+h) = (z+h-z_0) \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z+h-z_0)}\, dt,$$

$$Lf(z) = (z-z_0) \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z-z_0)}\, dt.$$

Mivel $\operatorname{Re} z > q_f$, ezért z_0 megválasztható úgy, hogy a $\operatorname{Re} z_0 > q_f$ feltétel is teljesüljön. Következésképpen, ha $|h|$ „elég kicsi”, akkor $\operatorname{Re}(z+h) > \operatorname{Re} z_0$ is igaz. Ha még $h \neq 0$, akkor

$$\frac{Lf(z+h) - Lf(z)}{h} =$$

$$\frac{1}{h}\left((z+h-z_0)\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z+h-z_0)}\, dt - (z-z_0)\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z-z_0)}\, dt\right) =$$

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z-z_0)} e^{-th}\, dt + (z-z_0)\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z-z_0)} \left(\frac{e^{-th}-1}{h}\right) dt =$$

$$\left[\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z-z_0)} (e^{-th}-1)\, dt + (z-z_0)\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z-z_0)} \left(\frac{e^{-th}-1}{h} + t\right) dt\right] +$$

$$\left[\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t(z-z_0)}\,dt - (z-z_0)\int_0^{+\infty} \varphi(t)te^{-t(z-z_0)}\,dt\right] =: A_h(z) + B(z).$$

3^o Belátjuk, hogy

$$\text{(a)} \qquad A_h(z) \to 0 \qquad (h \to 0),$$

$$\text{(b)} \qquad B(z) = -\textstyle\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-tz}\,dt.$$

Az (a) állítás igazolásához vegyük észre, hogy $t \geq 0$ esetén

$$|e^{-th} - 1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-th)^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t|h|)^n}{n!} = t|h|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t|h|)^{n-1}}{n!} \leq$$

$$t|h|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t|h|)^{n-1}}{(n-1)!} = t|h|e^{t|h|},$$

ill.

$$\left|\frac{e^{-th}-1}{h} + t\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n h^{n-1}}{n!} + t\right| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-t)^n h^{n-1}}{n!}\right| \leq$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n|h|^{n-1}}{n!} = t^2|h|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}|h|^{n-2}}{n!} \leq t^2|h|e^{t|h|}.$$

Innen azt kapjuk, hogy ha $K \in \mathbf{R}$ és $|\varphi(t)| \leq K \quad (t \geq 0)$, akkor

$$|A_h(z)| \leq K\int_0^{+\infty} \left|e^{-t(z-z_0)}\right| t|h|e^{t|h|}\,dt + K|z-z_0|\int_0^{+\infty} \left|e^{-t(z-z_0)}\right| t^2|h|e^{t|h|}\,dt =$$

$$K|h|\int_0^{+\infty} te^{-t(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0 - |h|)}\,dt + K|z-z_0||h|\int_0^{+\infty} t^2e^{-t(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0 - |h|)}dt.$$

Bevezetve az $x := \dfrac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0}{2}$ jelölést és feltéve, hogy az eddigieken túl még $|h| < x$ is igaz, a következőket mondhatjuk:

$$\int_0^{+\infty} te^{-t(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0 - |h|)}\,dt \leq \int_0^{+\infty} te^{-tx}\,dt =: \alpha < +\infty,$$

ill.

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0 - |h|)}\, dt \le \int_0^{+\infty} t^2 e^{-tx}\, dt =: \beta < +\infty,$$

azaz

$$|A_h(z)| \le K\alpha|h| + K\beta|z - z_0||h| \to 0 \qquad (h \to 0).$$

A (b) egyenlőtlenséghez integráljunk parciálisan:

$$-(z - z_0) \int_0^{+\infty} \varphi(t) t e^{-t(z-z_0)}\, dt =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left(\left[\varphi(t) t e^{-t(z-z_0)} \right]_0^b \right) - \int_0^{+\infty} (\varphi(t)t)' e^{-t(z-z_0)}\, dt =$$

$$-\int_0^{+\infty} \left(\varphi(t) + t f(t) e^{-tz_0} \right) e^{-t(z-z_0)}\, dt =$$

$$-\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-t(z-z_0)}\, dt - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-tz}\, dt,$$

azaz $B(z) = -\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-t(z-z_0)}\, dt$. ■

4.3. Megjegyzés.

Ha tehát $\Phi(t, z) := f(t)e^{-tz}$ $\quad (t \ge 0, z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > q_f)$, akkor $Lf(z) = \int_0^{+\infty} \Phi(t, z)\, dt$ és

$$(Lf)^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n \Phi(t, z)}{\partial z^n}\, dt \qquad (n \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}\, z > q_f).$$

Formálisan szólva „szabad az integráljel mögött deriválni”.

4.4. Tétel.

Legyen $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}, f \in D^n$ *és tegyük fel, hogy* $f^{(n)} \in \mathcal{D}_L$. *Ekkor* $f^{(k)} \in \mathcal{D}_L \quad (k = 0, ..., n-1)$ *és*

$$Lf^{(n)}(z) = z^n Lf(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) z^{n-k-1} \qquad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > \max\{0, q_{f^{(n)}}\}).$$

Bizonyítás. 1^o Teljes indukcióra hivatkozva csak az $n = 1$ esettel kell foglalkoznunk. Azt kell belátnunk, hogy ha $f' \in \mathcal{D}_L$, akkor $f \in \mathcal{D}_L$ és

$$Lf'(z) = zLf(z) - f(0) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \max\{0, q_{f'}\}).$$

2^o Legyen $b > 0$, ekkor parciálisan integrálva

$$\int_0^b f'(t)e^{-tz}\, dt = f(b)e^{-bz} - f(0) + z \int_0^b f(t)e^{-tz}\, dt.$$

Elég tehát azt megmutatni, hogy $\lim_{b\to+\infty} f(b)e^{-bz} = 0$.

3^o Legyen ehhez $0 < c < \operatorname{Re} z$ olyan, hogy $c > q_{f'}$. (Mivel $\operatorname{Re} z > q_{f'}$ és $\operatorname{Re} z > 0$, ezért ilyen c nyilván van.) Ha $g(x) := \int_0^x f(t)e^{-tc}\, dt \quad (x \geq 0)$, akkor először is mutassuk meg, hogy létezik a $\lim_{x\to+\infty} g(x) = Lf(c)$ határérték és

$$Lf(c) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{c}\left(f(0) + Lf'(c)\right).$$

Mivel

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{cx} g(x)}{e^{cx}},$$

ezért a *L'Hospital*-szabály alapján

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{cx} g(x)}{e^{cx}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{cx} g(x)\right)'}{\left(e^{cx}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ce^{cx} g(x) + e^{cx} f(x) e^{-cx}}{ce^{cx}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{c}\left(\int_0^x f(t)ce^{-tc}\, dt + f(x)e^{-cx}\right)\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{c}\left(\left[-f(t)e^{-tc}\right]_0^x+\int_0^x f'(t)e^{-tc}\,dt+f(x)e^{-cx}\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{c}\left(f(0)+\int_0^x f'(t)e^{-tc}\,dt\right)\right)=\frac{1}{c}\left(f(0)+Lf'(c)\right)\in\mathbf{C}.$$

Tehát minden $c>\max\{0,q_{f'}\}$ mellett létezik $Lf(c)$, ezért egyúttal bármely $z\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z>c$, azaz tetszőleges $z\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z>\max\{0,q_{f'}\}$ esetén is létezik $Lf(z)$. Továbbá

$$\frac{f(0)+Lf'(c)}{c}=\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left[-\frac{f(t)e^{-tc}}{c}\right]_0^x+\frac{1}{c}\int_0^x f'(t)e^{-tc}\,dt\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(0)-f(x)e^{-cx}}{c}+\frac{1}{c}\int_0^x f'(t)e^{-tc}\,dt\right).$$

Mivel

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{c}\int_0^x f'(t)e^{-tc}\,dt=\frac{1}{c}Lf'(c),$$

ezért létezik a $\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-cx}=0$ határérték. Ez azt is jelenti, hogy bármely $z\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z>c$ esetén $\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-zx}=0$, azaz (ld. 2^o) $Lf'(z)=zLf(z)-f(0)$. ■

4.4. Megjegyzések.

i) Analóg módon kapjuk az alábbi állítást: ha $f\in\mathcal{D}_L$, $\Psi(t):=\int_0^t f(x)\,dx\quad(t\geq 0)$, akkor $\Psi\in\mathcal{D}_L$ és

$$L\Psi(z)=\frac{1}{z}Lf(z)\qquad(z\in\mathbf{C},\ \operatorname{Re} z>\max\{0,q_f\}).$$

Sőt, ha a 4.4. Tétel bizonyításában f helyébe Ψ-t írunk, akkor (a bizonyításban szereplő egyéb jelölésekkel) a $g(x):=\int_0^x\Psi(t)e^{-tc}dt\quad(x\geq 0)$ függvényre a

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{cx}g(x)}{e^{cx}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{cx}g'(x)+ce^{cx}g(x)}{ce^{cx}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)+g'(x)/c\right)$$

egyenlőséghez jutunk. Mivel $\lim_{x\to+\infty} g(x) = L\Psi(c) \in \mathbf{C}$, ezért létezik a $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$ határérték. Innen az is adódik, hogy a $\Psi(z)$-t meghatározó $\int_0^{+\infty} \Psi(t)e^{-tz}dt$ integrál a $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \max\{0, q_f\}$ helyeken abszolút konvergens.

ii) Ha $f \in \mathcal{D}_L^\gamma$ (ld.1. fejezet), $f \in D$ és $f' \in \mathcal{D}_L$, akkor az $Lf'(z) = zLf(z) - f(0)$ ($z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \gamma$) egyenlőség egyszerűen megkapható:

$$Lf'(z) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f'(t)e^{-tz}\,dt =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left(f(b)e^{-bz} - f(0) + z\int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt \right),$$

ahol (ld. **1.** pont i) megjegyzés) $b \geq c$ esetén

$$\left|f(b)e^{-tz}\right| \leq Ke^{-b(\operatorname{Re} z-\gamma)} \to 0 \qquad (b \to +\infty).$$

Tehát

$$Lf'(z) = -f(0) + z\lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(t)e^{-tz}\,dt = zLf(z) - f(0).$$

iii) Ha ii)-ben az $f \in \mathcal{D}_L^\gamma$ függvényről $f \in D$ helyett csak annyit teszünk fel, hogy a $t > 0$ helyeken differenciálható és létezik az $f(+0) := \lim_{t\to+0} f(t)$ véges határérték, akkor

$$\int_0^b f'(t)e^{-tz}\,dt = \lim_{a\to+0} \int_a^b f'(t)e^{-tz}\,dt =$$

$$\lim_{a\to+0} \left(f(b)e^{-bz} - f(a)e^{-az}\right) = f(b)e^{-bz} - f(+0)$$

miatt ii)-ben

$$Lf'(z) = zLf(z) - f(+0) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \gamma)$$

adódik.

iv) Tegyük fel, hogy iii)-ban $f' \in \mathcal{D}_L^\gamma$ is igaz. Ekkor (ld. 2.1 ii) megjegyzés) azt kapjuk, hogy $\operatorname{Re} z \to +\infty$ esetén $Lf'(z) \to 0$. Ezért (ld. iii))

$$zLf(z) \to f(+0) \qquad (\mathrm{Re}\, z \to +\infty).$$

v) A iv)-beli eredmény $f' \in L^1[0,+\infty)$ esetén egyszerűen adódik az integrálelmélet klasszikus *Lebesgue*-tételéből. Ui.

$$\left|f'(t)e^{-tz}\right| = |f'(t)|e^{-t\mathrm{Re}\, z} \to 0 \qquad (t>0,\ \mathrm{Re}\, z \to +\infty)$$

és $|f'(t)e^{-tz}| \le |f'(t)| \quad ((t \ge 0, z \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}\, z > 0)$ miatt most is

$$\lim_{\mathrm{Re}\, z \to +\infty} Lf'(z) = \lim_{\mathrm{Re}\, z \to +\infty} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-tz}\, dt = \int_0^{+\infty} \lim_{\mathrm{Re}\, z \to +\infty} \left(f'(t)e^{-tz}\right) dt = 0.$$

vi) Legyen $f \in \mathcal{D}_L$ olyan, amelyre létezik az $f(+\infty) := \lim_{t\to+\infty} f(t) \in \mathbf{C}$ véges határérték. Ekkor tetszőleges $z \in \mathcal{D}_{Lf}$, $\mathrm{Re}\, z > 0$ helyen

$$zLf(z) - f(+\infty) = z\int_0^{+\infty} (f(t) - f(+\infty))e^{-tz}\, dt,$$

azaz minden $b > 0$ esetén

$$zLf(z) - f(+\infty) = z\int_0^{b} (f(t) - f(+\infty))e^{-tz}\, dt + z\int_b^{+\infty} (f(t) - f(+\infty))e^{-tz}\, dt.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és az előbbi b olyan, hogy $|f(t) - f(+\infty)| < \varepsilon \quad (t \ge b)$, amikor is

$$|zLf(z) - f(+\infty)| \le |z|\int_0^{b} |f(t) - f(+\infty)|\, dt + |z|\varepsilon\int_b^{+\infty} e^{-t\mathrm{Re}\, z}\, dt =$$

$$|z|\int_0^{b} |f(t) - f(+\infty)|\, dt + \frac{|z|}{\mathrm{Re}\, z}\varepsilon e^{-b\mathrm{Re}\, z} \le |z|\int_0^{b} |f(t) - f(+\infty)|\, dt + \frac{|z|}{\mathrm{Re}\, z}\varepsilon.$$

Ha $K \ge 0$ és $\mathbf{C}_K := \{z \in \mathbf{C} :\ \mathrm{Re}\, z > 0\,,\ |\mathrm{Im}\, z| \le K\cdot \mathrm{Re}\, z\}$, akkor bármely $z \in \mathbf{C}_K$ esetén

$$|zLf(z) - f(+\infty)| \le |z|\int_0^{b} |f(t) - f(+\infty)|\, dt + \sqrt{1+K^2}\cdot \varepsilon.$$

Válasszuk a $\delta > 0$ számot úgy, hogy $\delta\cdot \int_0^b |f(t) - f(+\infty)|\, dt \le \varepsilon$, ekkor minden $z \in \mathbf{C}_K$, $|z| < \delta$ mellett $|zLf(z) - f(+\infty)| \le \left(1 + \sqrt{1+K^2}\right)\cdot \varepsilon$, azaz

$$\lim_{\mathbf{C}_K \ni z \to 0} (zLf(z)) = f(+\infty).$$

vii) Tegyük fel, hogy vi)-ban $f \in L^1[0, +\infty)$. Ekkor nyilván $f(+\infty) = 0$. Továbbá bármely $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ esetén $|Lf(z)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$, azaz Lf korlátos a $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ félsíkon. Így $\lim_{\operatorname{Re} z \geq 0, z \to 0} (zLf(z)) = 0$ triviálisan teljesül.

viii) Ha $g(z) := e^{-1/z} \quad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0)$, akkor

$$g(z) = e^{-\operatorname{Re} z/|z|^2} e^{\imath \operatorname{Im} z/|z|^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0),$$

azaz bármely $K \geq 0, z \in \mathbf{C}_K$ esetén

$$|g(z)| \leq e^{-\operatorname{Re} z/|z|^2} \leq e^{-1/(K^2+1) \operatorname{Re} z},$$

tehát $\lim_{\mathbf{C}_K \ni z \to 0} g(z) = 0$. Ugyanakkor az $\operatorname{Im} z = \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2} \qquad (\operatorname{Re} z > 0)$ helyeken

$$g(z) = e^{-\operatorname{Re} z} e^{\imath \sqrt{1-(\operatorname{Re} z)^2}} \to e^{\imath} \qquad (z \to 0),$$

azaz nem létezik a $\lim_{z \to 0} g(z)$ határérték. (Mivel a $0 \neq z \mapsto G(z) := e^{-1/z}$ függvénynek az origóban lényeges szingularitása van, ezért a komplex függvénytanból jól ismert, a lényeges szingularitásokra vonatkozó *Picard*-tétel alapján bármely $r > 0$ esetén a $\mathbf{C} \setminus \{G(z) : z \in \mathbf{C}, 0 < |z| < r\}$ halmaz legfeljebb 1-elemű. Mindez most a komplex logaritmus segítségével közvetlenül is ellenőrizhető: $\{G(z) : z \in \mathbf{C}, 0 < |z| < r\} = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.)

ix) Tegyük fel, hogy az $f : [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ függvény differenciálható, $f' \in \mathcal{D}_L$ és létezik a vi)-beli véges $f(+\infty)$ határérték. Ekkor (ld. 4.4. Tétel) $Lf'(z) = zLf(z) - f(0)$ $(z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0)$, azaz

$$zLf(z) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-tz}\, dt.$$

Ha itt f olyan, hogy

$$\lim_{\operatorname{Re} z > 0, z \to 0} \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-tz}\, dt = \int_0^{+\infty} \lim_{z \to 0} \left(f'(t) e^{-tz}\right) dt = \int_0^{+\infty} f'(t)\, dt =$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b f'(t)\, dt = \lim_{b \to +\infty} (f(b) - f(0)) = f(+\infty) - f(0),$$

akkor $\lim_{\mathrm{Re}\, z>0, z\to 0} (zLf(z)) = f(+\infty)$.

x) Ha pl. ix)-ben $K \geq 0, \gamma > 0$ és alkalmas $c > 0$ esetén $|f'(t)| \leq Ke^{-\gamma t} \quad (t \geq c)$, akkor

$$\left| \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-tz}\, dt - \int_0^{+\infty} f'(t)\, dt \right| \leq$$

$$\left| \int_0^c f'(t) \left(e^{-tz} - 1\right)\, dt \right| + \left| \int_c^{+\infty} f'(t) \left(e^{-tz} - 1\right)\, dt \right| \leq$$

$$\int_0^c |f'(t)| \left|e^{-tz} - 1\right|\, dt + K \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} \left|e^{-tz} - 1\right|\, dt \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0),$$

ahol (ld. a 4.3. Tétel 3^o (a) bizonyítása)

$$\left|e^{-tz} - 1\right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-tz)^n}{n!} \right| \leq t|z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t|z|)^{n-1}}{(n-1)!} = t|z|e^{t|z|}.$$

Tehát az előbbiek szerint, ha még $|z| < \min\{1, \gamma/2\}$ is igaz, akkor

$$\left| \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-tz}\, dt - \int_0^{+\infty} f'(t)\, dt \right| \leq$$

$$|z| \int_0^c |f'(t)|te^{t|z|}\, dt + K|z| \int_0^{+\infty} te^{-t(\gamma - |z|)}\, dt \leq$$

$$|z| \int_0^c |f'(t)|te^{t}\, dt + K|z| \int_0^{+\infty} te^{-t(\gamma - |z|)}\, dt =$$

$$|z| \int_0^c |f'(t)|te^{t}\, dt + K|z| \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} te^{-t(\gamma - |z|)}\, dt =$$

$$|z| \int_0^c |f'(t)|te^{t}\, dt + \frac{K|z|}{(\gamma - |z|)^2} \leq \left(A + \frac{4K}{\gamma^2}\right)|z| \to 0 \qquad (|z| \to 0)$$

(ahol $A := \int_0^c |f'(t)|te^t\, dt$), így (ld. ix)) $\lim_{\mathrm{Re}\, z>0, z\to 0} (zLf(z)) = f(+\infty)$.

xi) Az előbbi megjegyzésbeli feltétel speciális esete annak, amikor $f' \in L^1[0,+\infty)$. Ekkor ui. $f'(t)e^{-tz} \to f'(t) \quad (z \to 0, t \geq 0)$, ill. ha még $\operatorname{Re} z > 0$, akkor $|f'(t)e^{-tz}| \leq |f'(t)| \quad (t \geq 0)$. A *Lebesgue*-tételt alkalmazva azt mondhatjuk tehát, hogy

$$\lim_{\operatorname{Re} z>0, z\to 0} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-tz}\,dt = \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt = f(+\infty) - f(0),$$

így (ld. ix)) $\lim_{\operatorname{Re} z>0, z\to 0} (zLf(z)) = f(+\infty)$.

5. Konvolúció.

Legyen $f, g \in \mathcal{D}_L$. Az

$$f * g(x) := \int_0^x f(t)g(x-t)\,dt \qquad (x \geq 0)$$

függvényt f és g *konvolúciójának* nevezzük. Világos, hogy $f * g = g * f$. Speciálisan az $|f(t)| \leq Ke^{\alpha t}, \;\; |g(t)| \leq Me^{\beta t} \quad (t \geq 0)$ feltételeknek (alkalmas $\alpha \neq \beta \in \mathbf{R}$, $K, M \geq 0$ paraméterekkel) eleget tevő $f, g \in \mathcal{D}_L$ függvényekre

$$|f * g(x)| \leq \int_0^x |f(t)||g(x-t)|\,dt \leq KMe^{\beta x} \int_0^x e^{(\alpha-\beta)t}\,dt =$$

$$\frac{KM}{\alpha - \beta}\left(e^{\alpha x} - e^{\beta x}\right) \leq \frac{KM}{|\alpha - \beta|} e^{\gamma x} \qquad (x \geq 0),$$

ahol $\gamma := \max\{\alpha, \beta\}$.

Ha pl.

$$\mathcal{D}_L^* := \{h \in \mathcal{D}_L : h \text{ korlátos minden } [a,b] \subset (0,+\infty) \text{ intervallumon}\},$$

akkor belátható, hogy bármely $f, g \in \mathcal{D}_L^*$ esetén $f * g \in \mathcal{D}_L^*$ és $f * g$ folytonos minden $x > 0$ helyen.

1^o Pl. Tekintsük első példaként az

$$f(t) := \begin{cases} 0 & (t = 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}} & (t > 0) \end{cases}$$

függvényt. Világos, hogy $f \in \mathcal{D}_L^*$, ill. $f * f(0) = 0$ és $x > 0$ esetén

$$f * f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{x-t}}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xu}} \frac{x}{\sqrt{x(1-u)}}\, du =$$

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin y \cos y}{\sqrt{\sin^2 y}\sqrt{1-\sin^2 y}}\, dy = \pi,$$

azaz

$$f * f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \pi & (x > 0). \end{cases}$$

2^o Pl. Legyen $f(t) := \sqrt{t}$ $(t \geq 0)$. Ekkor

$$f * f(x) = \int_0^x \sqrt{t}\sqrt{x-t}\, dt = \frac{\pi x^2}{8} \qquad (x \geq 0)$$

(ui. az integrandus grafikonja egy $(x/2, 0)$ középpontú és $x/2$ sugarú félkörív a koordinátasík $y \geq 0$ felében, így az integrál az illető félkör területe).

3^o Pl. Ha $g(t) := 1$ $(t \geq 0)$, akkor bármely $f \in \mathcal{D}_L$ esetén

$$f * g(x) = \int_0^x f(t) g(x-t)\, dt = \int_0^x f \qquad (x \geq 0),$$

ami nem más, mint az f függvény integrálfüggvénye.

A 4.4. i) megjegyzés szerint tehát (az ottani jelöléssel) az előbbi 3^o példában $f*g = \Psi$, azaz $L(f*g)(z) = L\Psi(z) = \frac{1}{z} Lf(z)$ $(z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > \max\{0, q_f\})$. Mivel (ld. 3.1. példa) $Lg(z) = \frac{1}{z}$ $(z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 0)$, ezért

$$L(f*g)(z) = Lf(z) Lg(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \max\{0, q_f\}).$$

A következő tételben az előbbi megjegyzésben szereplő eredmény általánosítását fogalmazzuk meg.

5.1. Tétel.

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathcal{D}_L^*$ és valamely $s \in \mathbf{C}$ esetén Lf, Lg abszolút konvergensek s-ben (azaz $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-ts}|\,dt, \int_0^{+\infty} |g(t)e^{-ts}|\,dt \in \mathbf{R}$). Ekkor $L(f*g)$ is abszolút konvergens s-ben és bármely $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z \geq \mathrm{Re}\, s$ esetén

$$L(f*g)(z) = Lf(z)Lg(z). \tag{5.1}$$

5.1. Megjegyzések.

i) A 2.1. vi) megjegyzés szerint tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z \geq \mathrm{Re}\, s$ mellett $Lf(z), Lg(z)$ abszolút konvergensek és így konvergensek is.

ii) Legyen $g(t) := 0 \ \ (t < 0)$, ekkor a szukcesszív integrálásra vonatkozó *Fubini*-tétel, ill. a helyettesítéses integrálás szabálya alapján

$$L(f*g)(z) = \int_0^{+\infty} f*g(t)e^{-tz}\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \right) e^{-tz}\,dt =$$

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\tau z} \left(\int_\tau^{+\infty} g(t-\tau)e^{-(t-\tau)z}\,dt \right) d\tau =$$

$$\left(\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\tau z}\,d\tau \right) \left(\int_0^{+\infty} g(t)e^{-tz}\,dt \right) =$$

$$Lf(z)Lg(z) \qquad (z \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}\, z \geq \ \mathrm{Re}\, s).$$

iii) Ha csak Lf (vagy Lg) abszolút konvergens s-ben és Lg (vagy Lf) csak konvergens s-ben, akkor $L(f*g)$ is csak konvergens s-ben, (1) pedig $z = s$-re és $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, s$ esetén teljesül.

iv) Például legyen $f(t) := \sqrt{t}$, $g(t) := \pi h_2(t)/8 = \pi t^2/8 \quad (t \geq 0)$, akkor a korábbi példáink alapján a következőket mondhatjuk: $f*f = g$, azaz

$$(Lf(z))^2 = L(f*f)(z) = Lg(z) = \frac{\pi}{8}Lh_2(z) = \frac{\pi}{4z^3} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0).$$

Ha itt $0 < z \in \mathbf{R}$, akkor $0 \le \int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-tz}\, dt = Lf(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{z\sqrt{z}}$, ezért általában is

$$Lf(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{z\sqrt{z}} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0),$$

ahol $z = |z|e^{\imath\alpha}$ $\quad (|\alpha| < \pi/2)$ esetén $\sqrt{z} := \sqrt{|z|}e^{\imath\alpha/2}$.

v) Alkalmazzuk a fenti tételt az 1^o-beli f függvényre. Ekkor (ld. 2.1. ix) megjegyzés, ill. 3.1.) a $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z > 0$ helyeken $(Lf)^2(z) = L(f*f)(z) = \pi/z$, azaz $Lf(z) = \sqrt{\pi}/\sqrt{z}$.

vi) Legyen $0 \ne \omega \in \mathbf{R}$ és $F(z) := \dfrac{\omega z}{(\omega^2+z^2)^2}$ $\quad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0)$. Az s_ω, c_ω függvényekre (ld. 3.6.)

$$s_\omega * c_\omega(x) = \int_0^x \sin(\omega t)\cos(\omega(x-t))\, dt =$$

$$\frac{\cos(\omega x)}{2}\int_0^x \sin(2\omega t)\, dt + \sin(\omega x)\int_0^x \sin^2(\omega t)\, dt =$$

$$\frac{\cos(\omega x)}{4}(1-\cos(2\omega x)) + \frac{\sin(\omega x)}{2}\int_0^x (1-\cos(2\omega t))\, dt =$$

$$\frac{\cos(\omega x)}{4}(1-\cos(2\omega x)) + \frac{x\sin(\omega x)}{2} - \frac{\sin(\omega x)}{4}\sin(2\omega x) =$$

$$\frac{x\sin(\omega x)}{2} + \frac{\cos(\omega x)}{4}(1-\cos(2\omega x)) - \frac{2\sin^2(\omega x)}{4}\cos(\omega x) =$$

$$\frac{x\sin(\omega x)}{2} + \frac{\cos(\omega x)}{4}(1-\cos(2\omega x)) - \frac{1-\cos(2\omega x)}{4}\cos(\omega x) =$$

$$\frac{x\sin(\omega x)}{2} =: H(x) \qquad (x \ge 0),$$

azaz $LH = L(s_\omega * c_\omega) = Ls_\omega Lc_\omega = F$.

6. Mellin-transzformáció.

Tegyük fel, hogy a folytonos $g \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényre valamely $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén teljesül a $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z > \alpha\} \subset \mathcal{D}_g$ feltétel. Ha $x > \alpha, b > 0$ és $\ell_b(y) := x + \imath y \quad (-b \le y \le b)$, akkor legyen

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} g(z)\, dz := \lim_{b \to +\infty} \int_{\ell_b} g(z)\, dz$$

(ahol $\int_{\ell_b} g(z)\, dz$ a g függvénynek az ℓ_b (irányított) komplex útra („szakaszra") vett vonalintegrálját jelenti), feltéve, hogy ez a határérték létezik és $\mathbf{C}$-beli. Tehát (a vonalintegrál definíciója szerint)

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} g(z)\, dz = \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} g(\ell_b(y))\ell_b'(y)\, dy =$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} \imath g(x + \imath y)\, dy = \imath(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x + \imath y)\, dy,$$

azaz

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x + \imath y)\, dy = \frac{1}{\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} g(z)\, dz,$$

ahol $(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots := \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} \ldots$ a szóban forgó „integrál" ún. *Cauchy-féle főértéke* (*valor principalis*).

Adott $f \in \mathcal{D}_L$ és $x \in \mathbf{R}, x > q_f$ esetén tekintsük azt a $\Phi_x : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ függvényt, amelyre

$$\Phi_x(t) := \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-xt} f(t) = f_x(t) & (t \ge 0). \end{cases}$$

Ha Φ_x (*Lebesgue*-szerint) integrálható (azaz (ld. 1.1. viii) megjegyzés) $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$), akkor a $\widehat{\Phi}_x$ *Fourier*-transzformáltjára a következőt kapjuk:

$$\widehat{\Phi}_x(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(t) e^{-\imath yt}\, dt =$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+\imath y)t}\,dt = Lf(x+\imath y) = Lf(z) \quad (y \in \mathbf{R}, z := x+\imath y).$$

Ez a helyzet pl. akkor, ha $f \in \mathcal{D}_L^\gamma$, amikor is léteznek olyan $\gamma \in \mathbf{R}$ és $0 \le K, c \in \mathbf{R}$ számok, amelyekkel $|f(t)| \le Ke^{\gamma t} \quad (t \ge c)$, azaz $|\Phi_x(t)| \le Ke^{(\gamma-x)t} \quad (t \ge c)$ (ld. 1.1. i) megjegyzés). Ebben az esetben ui. bármely $x > \gamma$ mellett

$$\int_0^{+\infty} |\Phi_x| \le \int_0^c |\Phi_x| + K\int_c^{+\infty} e^{(\gamma-x)t}\,dt < +\infty,$$

azaz Φ_x integrálható.

Tegyük fel, hogy valamilyen $t > 0$ esetén Φ_x-re alkalmazható a *Fourier*-inverziós formula, azaz

$$\Phi_x(t) = \frac{1}{2\pi}(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\Phi}_x(y)e^{\imath yt}\,dy = \frac{1}{2\pi}(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath yt}\left(\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-(x+\imath y)\tau}\,d\tau\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath yt}Lf(x+\imath y)\,dy.$$

(Ha pl. $\widehat{\Phi}_x$ is (*Lebesgue*-szerint) integrálható), akkor mindez majdnem minden $t \ge 0$ helyen teljesül és $(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} ...$ helyett a „közönséges” $\int_{-\infty}^{+\infty} ...$ (*Lebesgue*-) integrál írható.) Ekkor tehát $f(t) = e^{xt}\Phi_x(t) = \frac{1}{2\pi}(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x+\imath y)}Lf(x+\imath y)\,dy$, azaz a fenti formalizmussal

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} e^{tz}Lf(z)\,dz. \tag{6.1}$$

Pl. jól ismert a *Fourier*-transzformációval kapcsolatban, hogy ha $t > 0$ és van olyan $0 < \delta < t$, hogy a Φ_x függvény a $(t-\delta, t+\delta)$ intervallumon korlátos változású és Φ_x folytonos t-ben (ami most nyilván azzal ekvivalens, hogy az f függvény folytonos a t helyen), akkor t-ben igaz a fenti inverziós formula. (Röviden felidézzük a korlátos változású függvény fogalmát: akkor mondjuk, hogy egy kompakt $[a, b]$ intervallumon értelmezett $g : [a, b] \to \mathbf{C}$ függvény *korlátos változású,* ha $\sup_\tau \sum_{k=0}^n |g(t_{k+1}) - g(t_k)| < +\infty$, ahol a szuprémum az $[a, b]$ intervallum $\tau = \{t_0, ..., t_n\} \quad (n \in \mathbf{N},\ t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b)$ felosztásaira vonatkozik. Világos, hogy minden ilyen g függvény korlátos, ill. (egyszerű számolással igazolhatóan) g-vel együtt a $[a, b] \ni t \mapsto g(t)e^{-ts}$ függvény is korlátos változású tetszőleges $s \in \mathbf{R}$ esetén.) Ha tehát $f \in \mathcal{D}_L^{\exp}$ és az f függvény egy $t > 0$ esetén valamilyen $\delta > 0$ mellett a $(t-\delta, t+\delta)$ intervallumon korlátos változású és t-ben folytonos, akkor alkalmas x „abszcisszával” fennáll a $(*)$ egyenlőség.

6.1. Tétel.

Legyen $F \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ *és* $\mathcal{D} := \{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > \alpha\} \subset \mathcal{D}_F$, $F \in D\{z\}$ $(z \in \mathcal{D})$. *Tegyük fel továbbá, hogy tetszőleges* $0 < \delta$*-ra a* $\{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z \geq \alpha + \delta\}$ *zárt félsíkban* $\lim_{|z| \to +\infty} F(z) = 0$ *és minden* $x \in \mathbf{R}, x > \alpha$ *esetén az*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + \imath y)|\, dy$$

integrál véges. Ekkor bármely $t \geq 0$ *helyen az* $\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\, dz$ *integrálok is végesek és függetlenek* $\alpha < x$*-től, az*

$$f(t) := \frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\, dz \qquad (t \geq 0) \tag{6.2}$$

előírással definiált f *függvény* $\mathcal{D}_L$*-beli (ahol* $\alpha < x$ *tetszőleges) és* $Lf(z) = F(z)$ $(z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > \alpha)$.

6.1. Megjegyzések.

i) Tehát azt írhatjuk, hogy

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lf(z)e^{tz}\, dz \qquad (t \geq 0).$$

Ez az egyenlőség az ún. *Mellin-formula* (Riemann (1859), Mellin (1902)). Érdemes kihangsúlyozni, hogy a fenti tételbeli feltételek csak elégségesek: nem nehéz példát konstruálni olyan F-re, amelyre az $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + \imath y)|\, dy < +\infty$ feltétel nem teljesül, de alkalmas f függvénnyel mégis $F = Lf$.

ii) A tételben szereplő $\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\, dz$ integrálról a következőt mondhatjuk:

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\, dz = \imath \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} F(x + \imath y)e^{t(x+\imath y)}\, dy =$$

$$\imath e^{tx} \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} F(x + \imath y)e^{\imath t y}\, dy.$$

Mivel

$$\int_{-b}^{b} |F(x + \imath y)e^{\imath t y}|\, dy = \int_{-b}^{b} |F(x + \imath y|\, dy \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + \imath y)|\, dy,$$

azaz $\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}|F(x+\imath y)e^{t(x+\imath y)}|\,dy \le e^{tx}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x+\imath y)|\,dy < +\infty$, ezért a szóban forgó („improprius”) integrál (abszolút) konvergens.

iii) Az $\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\,dz$ integrál $(\alpha <)x$-től való függetlensége egyszerűen belátható. Legyen ui. $\alpha < u < x$ és valamely $b > 0$ mellett

$$s_b(y) := u - \imath b + y(x-u)\ ,\ \tilde{s}_b(y) := x + \imath b + y(u-x) \qquad (0 \le y \le 1),$$

$$\tilde{\ell}_b(y) := u - \imath y \qquad (-b \le y \le b),$$

ill. jelöljük φ-vel az $s_b, \ell_b, \tilde{s}_b, \tilde{\ell}_b$ (komplex) utak egyesítését (geometriailag egy téglalap kerülete pozitív körüljárással). Ekkor a komplex függvénytanból jól ismert *Cauchy*-alaptétel miatt

$$0 = \int_\varphi F(z)\,dz = \int_{s_b} F(z)\,dz + \int_{\ell_b} F(z)\,dz + \int_{\tilde{s}_b} F(z)\,dz + \int_{\tilde{\ell}_b} F(z)\,dz,$$

ahol az F-re tett feltételek alapján

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{s_b} F(z)\,dz = \lim_{b\to+\infty}\int_{\tilde{s}_b} F(z)\,dz = 0,$$

ill.

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{l_b} F(z)\,dz = \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\,dz$$

és

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{\tilde{\ell}_b} F(z)\,dz = -\int_{u-\imath\infty}^{u+\imath\infty} F(z)e^{tz}\,dz.$$

Mindebből $\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\,dz = \int_{u-\imath\infty}^{u+\imath\infty} F(z)e^{tz}\,dz$ már nyilván következik.

iv) Ha a (*Lebesgue*-)mérhető $g : [0,+\infty) \to \mathbf{C}$ függvény a $[0,+\infty)$ intervallum majdnem minden pontjában nulla, akkor nyilván $g \in \mathcal{D}_L$ és $Lg(z) = 0 \quad (z \in \mathbf{C})$. Ezért tetszőleges $h \in \mathcal{D}_L$ függvényre $h + g \in \mathcal{D}_L$ és $L(h+g) = Lh$.

v) A fenti 6.1. Tétel megfogalmazása előtti „felvezetésben” szereplő f függvényről azt tettük fel, hogy $\mathcal{D}_L^{\exp}$-beli. Más szóval tehát (ld. 2.1. vi) megjegyzés) azt, hogy valamilyen $z \in \mathcal{D}_{Lf}$ helyen az $Lf(z)$-t meghatározó improprius integrál abszolút konvergens. Induljunk ki most egy tetszőleges $f \in \mathcal{D}_L$ függvényből. Ekkor (ld. 4.4. i) megjegyzés) a $\Psi(t) := \int_0^t f(\tau)\,d\tau \quad (t \ge 0)$ integrálfüggvény *Laplace*-transzformáltja minden $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z > \max\{0, q_f\}$ helyen egy abszolút konvergens improprius integrál és itt $L\Psi(z) = Lf(z)/z$. Mivel az f függvény lokálisan integrálható, ezért az abszolút folytonos Ψ függvény minden kompakt intervallumon korlátos változású. Következésképpen a most idézett, a 6.1. Tételt bevezető fejtegetést Ψ-re alkalmazva azt kapjuk, hogy ha valamilyen $0 \le x_0 \in \mathbf{R}$ helyen $Lf(x_0)$ létezik, akkor tetszőleges $x > x_0$ esetén

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty}\frac{Lf(z)}{z}e^{tz}dz \qquad (t \ge 0).$$

Innen a klasszikus, az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tétel értelmében aztán

$$f(t) = \Psi'(t) \qquad (\text{m.m.}\, t \ge 0).$$

Megjegyezzük, hogy ha a fentiekben $x_0 < 0$, akkor a következő látható be: bármely $x_0 < x < 0$ esetén

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty}\frac{Lf(z)}{z}e^{tz}dz = -Lf(0) + \begin{cases} \int_0^t f(\tau)\,d\tau & (t \ge 0) \\ 0 & (t < 0). \end{cases}$$

vi) Nem nehéz meggondolni, hogy az előző 6.1. Tételben a *Mellin*-transzformációval kapott f függvény folytonos. Valóban, a 6.1. Tételbeli (6.2) formula másképp írva így szól: ha $G(y) := F(x + \imath y)$ $(y \in \mathbf{R})$, akkor a 6.1. Tétel feltételei szerint $G \in L^1(-\infty, +\infty)$ és

$$f(t) = \frac{e^{xt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x+\imath y)e^{\imath ty}dy = \frac{e^{xt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(y)e^{\imath ty}dy =$$

$$\frac{e^{xt}}{2\pi}\widehat{G}(-t) \qquad (t \ge 0).$$

A *Fourier*-transzformáció elemi tulajdonságai szerint $\widehat{G}$ (egyenletesen) folytonos függvény, ezért az f függvény is folytonos.

vii) Legyen $f, g \in \mathcal{D}_L^\gamma$ (ld. 1.1. i) megjegyzés) és tegyük fel, hogy az $F := Lf$ és az $F := Lg$ *Laplace*-transzformáltak teljesítik az előző tétel feltételeit (alkalmas α_f, α_g paraméterekkel). Más szóval tehát a *Mellin*-formula szerint

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lf(z)e^{tz}\,dz \qquad (x > \alpha_f, t \ge 0)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lg(z)e^{tz}\,dz \qquad (x > \alpha_g, t \geq 0).$$

Ekkor az 5.1. „konvolúció-tétel” mintegy megfordításaként

$$L(fg)(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lf(\xi)Lg(z-\xi)\,d\xi \qquad (z \in \mathbf{C},\, \mathrm{Re}\, z > \alpha_f + \alpha_g),$$

ahol $x > \max\{\alpha_f, \alpha_g\}$.

Ui.

$$L(fg)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-tz}\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_0^{+\infty} g(t)e^{-tz} \left(\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lf(\xi)e^{t\xi}\,d\xi \right) dt =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lf(\xi) \left(\int_0^{+\infty} g(t)e^{-t(z-\xi)}\,dt \right) d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} Lf(\xi)Lg(z-\xi)\,d\xi.$$

(Az $\int_0^{+\infty} \left(\ldots \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \ldots\, d\xi \right) dt = \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \ldots \left(\int_0^{+\infty} \ldots\, dt \right) d\xi$ integrálási sorrend felcserélhetőségét a szóban forgó integrálok „egyenletes” konvergenciája biztosítja.)

viii) Mutassuk be a *Mellin*-transzformációról szóló 6.1. Tétel alkalmazását egy, a gyakorlat szempontjából is fontos speciális esetben. Ennek a megfogalmazásához tegyük fel, hogy valamilyen $\alpha \geq 0$ esetén az $F : \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z > \alpha\} \to \mathbf{C}$ függvény analitikus és alkalmas $n \in \mathbf{N}$, $c_1, ..., c_n \in \mathbf{C}$, $\varepsilon > 0$, $0 < a_1, ..., a_n \leq 1$ paraméterekkel előállítható a következő alakban:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^{a_k}} + \frac{H(z)}{z^{1+\varepsilon}} \qquad (z \in \mathbf{C},\, \mathrm{Re}\, z > \alpha),$$

ahol a $H : \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z > \alpha\} \to \mathbf{C}$ függvény minden $\delta > 0$ esetén korlátos a $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z \geq \alpha + \delta\}$ zárt félsíkban. Ekkor az $\alpha < x$-től független

$$f(t) := \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}dz \qquad (t \geq 0)$$

függvényre $f \in \mathcal{D}_L$ és $Lf = F$ igaz.

Ti. könnyű belátni, hogy az

$$F_1(z) := F(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^{a_k}} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \alpha)$$

függvényre teljesülnek a 6.1. Tétel feltételei. Következésképpen $Lf_1 = F_1$, ahol

$$f_1(t) := \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F_1(z)e^{tz}dz =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} e^{tz}\left(F(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^{a_k}}\right) dz \qquad (t \geq 0).$$

Mivel itt $x > 0$, ezért a 6.1. Tétel alapján (ld. 3.3.)

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} e^{tz}\frac{c_k}{z^{a_k}}\, dz = \frac{c_k t^{a_k-1}}{\Gamma(a_k)} \qquad (t \geq 0, k = 1, ..., n).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}dz - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k t^{a_k-1}}{\Gamma(a_k)} =:$$

$$f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k t^{a_k-1}}{\Gamma(a_k)} \qquad (t \geq 0).$$

Innen viszont az következik, hogy tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \alpha$ helyen

$$F_1(z) = Lf_1(z) = Lf(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^{a_k}} = Lf(z) - (F(z) - F_1(z)),$$

azaz valóban $Lf = F$.

ix) A *Laplace*-transzformált analitikus tulajdonságaiból esetenként következtetni tudunk a *Mellin*-transzformált aszimptotikus viselkedésére a végtelenben (ld. **3.** pont i) megjegyzés). Tegyük fel ehhez, hogy az $F \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény egy $a \in \mathbf{R}$ esetén analitikus a $\{\alpha_k \neq z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \leq a, k \in \mathbf{N}\}$ halmazon, ahol $a > \operatorname{Re}\alpha_0 > \operatorname{Re}\alpha_1 > ...$ és az F függvénynek pólusai vannak az α_k-kban. Legyen

$$F(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{kj}}{(z-\alpha_k)^j} + F_k(z) \qquad (z \in \mathbf{C}, 0 < |z-\alpha_k| < r_k)$$

az F függvény *Laurant*-sorfejtése az $\alpha_k \quad (k \in \mathbf{N})$ pont körül (alkalmas $m_k \in \mathbf{N}$, $c_{kj} \in \mathbf{C} \quad (j = 1, ..., m_k)$, $c_{km_k} \neq 0$, $r_k > 0$ paraméterekkel és az α_k valamilyen környezetében analitikus F_k függvénnyel). Tegyük fel továbbá, hogy van olyan $b \in \mathbf{R}$, amellyel az $f : (b, +\infty) \to \mathbf{C}$ függvény előállítható

$$f(t) := \frac{1}{2\pi\imath} \int_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} F(z) e^{tz} dz \qquad (t > b)$$

alakban (azaz a szóban forgó integrálok konvergensek). Feltesszük még, hogy megadhatók a $\operatorname{Re}\alpha_{k+1} < \beta_k < \operatorname{Re}\alpha_k \quad (k \in \mathbf{N})$ feltételeknek eleget tevő β_k számok úgy, hogy minden $k \in \mathbf{N}$ esetén

1^o $\lim_{|y|\to+\infty} F(x + \imath y) = 0$ az $x \in [\beta_k, a]$ elemek szerint egyenletesen,

2^o van olyan $C_k \geq 0$ és $b_k \geq b$, hogy

$$\left| (p.v.) \int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta_k + \imath y) e^{\imath t y} dy \right| \leq C_k t^{m_k - 1} \qquad (t \geq b_k).$$

Ekkor

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{kj} t^{j-1}}{(j-1)!} e^{t\alpha_k} \qquad (b < t \to +\infty).$$

Legyen ui. $n = 0, 1, ...$ és $\omega > 0$ esetén $\varphi_{n\omega}$ az a (az óramutató járásával megegyező körüljárású) négyszögvonal („téglalap”), amelynek a vízszintes oldalai az $\{x \pm \imath\omega \in \mathbf{C} : \beta_n \leq x \leq a\}$ szakaszok (legyenek ezek $l_\omega^\pm$), a függőleges oldalai pedig az $l_\omega^{\beta_n} := \{\beta_n + \imath y : -\omega \leq y \leq \omega\}$, ill. az $l_\omega^a := \{a + \imath y : -\omega \leq y \leq \omega\}$ szakaszok. Feltesszük, hogy ω már olyan nagy, hogy a szóban forgó téglalap a belsejében tartalmazza az $\alpha_0, ..., \alpha_n$ pontokat. Ekkor bármely $b < t$-re

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{\varphi_{k\omega}} F(z)e^{tz}dz = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{res}_{\,\alpha_k} G,$$

ahol $G(z) := F(z)e^{tz} \quad (z \in \mathcal{D}_F)$. Nem nehéz meggondolni, hogy a G függvény α_k-beli reziduuma a következő:

$$\mathrm{res}_{\,\alpha_k} G = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{kj}t^{j-1}}{(j-1)!}e^{t\alpha_k} \qquad (k = 0, ..., n).$$

Nyilván

$$\int_{\varphi_{k\omega}} F(z)e^{tz}dz = \int_{l_\omega^-} F(z)e^{tz}dz + \int_{l_\omega^a} F(z)e^{tz}dz - \int_{l_\omega^+} F(z)e^{tz}dz - \int_{l_\omega^{\beta_n}} F(z)e^{tz}dz.$$

Az 1^o feltétel miatt könnyen adódik, hogy $\lim_{\omega\to+\infty}\int_{l_\omega^\pm} F(z)e^{tz}dz = 0$. Következésképpen (az $\omega \to +\infty$ határátmenet után)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\beta_n-\imath\infty}^{\beta_n+\imath\infty} F(z)e^{tz}dz + \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{kj}t^{j-1}}{(j-1)!}e^{t\alpha_k},$$

ahol

$$\int_{\beta_n-\imath\infty}^{\beta_n+\imath\infty} F(z)e^{tz}dz = \imath e^{t\beta_n}(p.v.)\int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta_n+\imath y)e^{\imath ty}dy.$$

Így a 2^o feltétel alapján

$$\left|\int_{\beta_n-\imath\infty}^{\beta_n+\imath\infty} F(z)e^{tz}dz\right| \le C_n t^{m_n-1}e^{t\beta_n} \qquad (t \ge b_n).$$

Az

$$R_n(t) := \sum_{j=1}^{m_n} \frac{c_{nj}t^{j-1}}{(j-1)!}e^{t\alpha_n} =: P_n(t)t^{m_n-1}e^{t\alpha_n} \qquad (0 < t \in \mathbf{R})$$

jelölésekkel $\lim_{t\to+\infty} P_n(t) = c_{nm_n} \neq 0$, ill. $\beta_n < \mathrm{Re}\,\alpha_n$ miatt

$$\frac{e^{t(\beta_n - \operatorname{Re}\alpha_n)}}{|P_n(t)|} \to 0 \qquad (t \to +\infty).$$

Ezért

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{kj} t^{j-1}}{(j-1)!} e^{t\alpha_k} \right| \cdot \frac{1}{|R_n(t)|} = \frac{1}{2\pi |R_n(t)|} \left| \int_{\beta_n - \imath\infty}^{\beta_n + \imath\infty} F(z) e^{\imath t z} dz \right| \leq$$

$$C_n \frac{e^{t(\beta_n - \operatorname{Re}\alpha_n)}}{2\pi |P_n(t)|} \to 0 \qquad (t \to +\infty).$$

Ez éppen azt jelenti, amit állítottunk. Megjegyezzük, hogy a 2^o feltétel teljesül, ha pl. az $(*)$ $(p.v.) \int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta_k + \imath y) e^{\imath t y} dy \quad (k \in \mathbf{N})$ integrálok egyenletesen konvergensek $b < t$-re nézve. Sőt, mivel a *Riemann-Lebesgue*-lemma szerint bármely $\omega > 0$ esetén

$$\int_{-\omega}^{\omega} F(\beta_n + \imath y) e^{\imath t y} dy \to 0 \qquad (t \to +\infty),$$

ezért a most mondott $(*)$ feltétel alapján

$$(p.v.) \int_{-\infty}^{+\infty} F(\beta_n + \imath y) e^{\imath t y} dy \to 0 \qquad (t \to +\infty)$$

is rögtön következik. Ha ráadásul végesek az $(**)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\beta_k + \imath y)| \, dy < +\infty$ $(k \in \mathbf{N})$ (*Lebesgue*-)integrálok, akkor a $(*)$ feltétel automatikusan teljesül. Persze, a $(**)$ kikötés túl erős, még $(*)$-hoz képest is, amint azt az alábbi példa mutatja: $F(z) := F(x + \imath y) := y^{-\lambda} \quad (x \in \mathbf{R}, y > 0)$, ahol $0 < \lambda \leq 1$. Ekkor bármely $u > 0$ és $0 \neq t \in \mathbf{R}$ esetén (parciális integrálással)

$$\int_u^{+\infty} F(x + \imath y) e^{\imath t y} dy = \int_u^{+\infty} y^{-\lambda} e^{\imath t y} dy = \frac{\imath e^{\imath t u}}{t u^\lambda} + \frac{\lambda}{\imath t} \int_u^{+\infty} y^{-\lambda - 1} e^{\imath t y} dy,$$

azaz a $t \geq b > 0$ helyeken

$$\left| \int_u^{+\infty} F(x + \imath y) e^{\imath t y} dy \right| \leq \frac{1}{b u^\lambda} + \frac{\lambda}{b} \int_u^{+\infty} y^{-\lambda - 1} dy = \frac{2}{b u^\lambda} \to 0 \qquad (u \to +\infty).$$

Következésképpen az $(p.v.) \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + \imath y) e^{\imath t y} dy \quad (t \geq b)$ integrálok egyenletesen konvergensek. Ugyanakkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+\imath y)|\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^{\lambda}} = +\infty,$$

tehát a példabeli F-re $(**)$ nem igaz.

x) (*Parseval-egyenlőség.*) Tegyük fel, hogy a (*Lebesgue*-)mérhető $f : [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ függvényre valamilyen $x_0 \in \mathbf{R}$ esetén

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-2tx_0}\, dt < +\infty.$$

Ekkor nyilván

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-2tx} dt < +\infty$$

is igaz tetszőleges $x > x_0$ mellett. Mivel a *Cauchy-Bunyakovszkij*-egyenlőtlenség szerint ekkor

$$\left(\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-tx} dt\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t(x-x_0)} e^{-tx_0} dt\right)^2 \le$$

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-2t(x-x_0)} dt\right)\left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-2tx_0} dt\right) < +\infty,$$

ezért (ld. 1.1. viii) megjegyzés) $f_x \in L^1[0, +\infty) \cap L^2[0, +\infty)$. Így $f \in \mathcal{D}_L$, ill. $\Phi_x \in L^2(-\infty, +\infty)$ és $Lf(x+\imath y) = \widehat{\Phi}_x(y)$ $(y \in \mathbf{R})$. A *Fourier*-transzformáltakra vonatkozó *Parseval*-egyenlőség szerint

$$2\pi \|\Phi_x\|_2^2 = \|\widehat{\Phi}_x\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\Phi}_x(y) \overline{\widehat{\Phi}_x(y)}\, dy,$$

más szóval

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-2tx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |Lf(x+\imath y)|^2 dy. \tag{6.3}$$

Ha tehát

$$\kappa := \inf\left\{x \in \mathbf{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-2tx}dt < +\infty\right\},$$

akkor bármely $x > \kappa$ „abszcisszával” teljesül a (6.3) *Parseval-egyenlőség.*

xi) Analóg módon kapjuk (a *Fourier*-transzformáltakra vonatkozó általánosított *Parseval*-egyenlőség alkalmazásával) az előbbi (6.3) formula alábbi kiterjesztését: ha $f_k \in \mathcal{D}_L \quad (k = 1, 2)$ és

$$\int_0^{+\infty} |f_k(t)|e^{-tx_k}dt < +\infty \ , \ \int_0^{+\infty} |f_k(t)|^2 e^{-2tx_k}dt < +\infty$$

alkalmas $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ számokkal, akkor a $z_k := x_k + \imath y \quad (y \in \mathbf{R},\ k = 1, 2)$ jelöléssel

$$\int_0^{+\infty} f_1(t)\overline{f_2(t)}e^{-t(z_1+\overline{z_2})}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Lf_1(x_1 + \imath y)\overline{Lf_2(x_2 + \imath y)}\,dy,$$

(ahol a $\overline{(...)}$ szimbólum most a komplex konjugálást jelenti). Világos, hogy $f := f_1 = f_2$, $x := z_1 = z_2$ esetén visszakapjuk a (6.3) egyenlőséget.

xii) Írjunk xi)-ben $z_1 := z_2 := 0$-t, amikor is az ottani $f_k \quad (k = 1, 2)$ függvényekre $f_k \in L^1[0, +\infty) \cap L^2[0, +\infty)$ és

$$\int_0^{+\infty} f_1(t)\overline{f_2(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Lf_1(\imath y)\overline{Lf_2(\imath y)}\,dy$$

adódik. Ha itt a bal oldal nulla, azaz f_1, f_2 *ortogonálisak* az $L^2[0, +\infty)$ *Hilbert*-térben, akkor ez utóbbi igaz az $F_k(y) := Lf_k(\imath y) \quad (y \in \mathbf{R},\ k = 1, 2)$ függvényekre is az $L^2(-\infty, +\infty)$ *Hilbert*-térben (vagy másképp kifejezve az $Lf_k \quad (k = 1, 2)$ függvényekre az imaginárius tengelyen).

xiii) Tekintsük pl. a $P_n \ (n \in \mathbf{N})$ *Laguerre-polinomokat,* azaz a $g_n(t) := e^{-t}t^n \quad (t \geq 0)$ jelöléssel

$$P_n(t) := \frac{e^t}{n!}g_n^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{t^k}{k!} \qquad (t \geq 0).$$

Ekkor az $l_n(t) := e^{-t/2}P_n(t) \quad (n \in \mathbf{N}, t \geq 0)$ *Laguerre-függvények* ortogonális rendszert alkotnak az alábbi értelemben: $l_n \in L^1[0, +\infty) \cap L^2[0, +\infty)$ és tetszőleges $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq n$ esetén

$$\int_0^{+\infty} l_n(t)l_m(t)\,dt = \int_0^{+\infty} P_n(t)P_m(t)e^{-t}dt = 0.$$

Ezért xii) szerint az $Ll_n \quad (n \in \mathbf{N})$ *Laplace*-transzformáltak rendszere is ortogonális:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ll_n(\imath y)\overline{Ll_m(\imath y)}\,dy = 0 \qquad (m,n \in \mathbf{N}, m \neq n),$$

ahol (könnyen ellenőrizhetően)

$$Ll_n(z) = \frac{(z-1/2)^n}{(z+1/2)^{n+1}} \qquad (\operatorname{Re} z > -1/2, n \in \mathbf{N}).$$

Tehát

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\imath y-1/2)^n}{(\imath y+1/2)^{n+1}}\frac{(\imath y+1/2)^m}{(1/2-\imath y)^{m+1}}\,dy = 0 \qquad (m,n \in \mathbf{N}, m \neq n).$$

xiv) (*Komplex konvolúció* (ld. vii).) Tegyük fel, hogy a *Lebesgue*-szerint mérhető $f_k : [0,+\infty) \to \mathbf{R} \quad (k=1,2)$ függvényekre valamilyen $s_k \in \mathbf{R} \quad (k=1,2)$ esetén

$$(1^o) \qquad \int_0^{+\infty} |f_k(t)|e^{-ts_k}dt < +\infty,$$

$$(2^o) \qquad \int_0^{+\infty} |f_k(t)|^2e^{-2ts_k}dt < +\infty.$$

Legyen tetszőleges $z \in \mathbf{C}$, ill. $s_1 \leq u \leq \operatorname{Re} z - s_2$, $s_2 \leq v \leq \operatorname{Re} z - s_1$ választással a xi)-beli egyenlőségben $z_1 := u$ és $z_2 := \overline{z} - u$. Ekkor a szóban forgó egyenlőség bal oldala: $\int_0^{+\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-tz}dt$, a jobb oldala:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Lf_1(u+\imath y)Lf_2(\overline{z_2}-\imath y)\,dy =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Lf_1(u+\imath y)Lf_2(z-(u+\imath y))\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{u-\infty}^{u+\infty} Lf_1(\xi)Lf_2(z-\xi)\,d\xi.$$

(Megjegyezzük, hogy az u-ra vonatkozó kikötés miatt $\operatorname{Re} z_1 = u \geq s_1$, továbbá $\operatorname{Re} z_2 = \operatorname{Re} z - u \geq s_2$. Ezért a xi)-beli feltételek teljesülnek az $x_1 := u$,

$x_2 := \operatorname{Re} z - u$ választással.) Hasonló meggondolással kapjuk az utóbbi integrálra, hogy az nem más, mint

$$\frac{1}{2\pi}\int_{v-\infty}^{v+\infty} Lf_1(z-\xi)Lf_2(\xi)\,d\xi.$$

Azt mondhatjuk tehát, hogy minden $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z \geq s_1 + s_2$ helyen létezik az $L(f_1 f_2)(z)$ *Laplace*-transzformált és az a fenti komplex konvolúcióval számítható ki:

$$L(f_1 f_2)(z) = \int_0^{+\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-tz}dt =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{u-\imath\infty}^{u+\imath\infty} Lf_1(\xi)Lf_2(z-\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{v-\imath\infty}^{v+\imath\infty} Lf_1(z-\xi)Lf_2(\xi)\,d\xi.$$

Ha csak a 2^o feltétel áll fenn, akkor a x)-ben mondottakat szem előtt tartva a fentiek $s_1 < u < \operatorname{Re} z - s_2$, $s_2 < v < \operatorname{Re} z - s_1$, ill. $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > s_1 + s_2$ esetén teljesülnek.

7. A Mellin-formula alkalmazásai.

A *Mellin*-formula alkalmazását („kiszámítását”) az alábbi példákkal illusztráljuk.

7.1. Legyen pl. $F(z) := \dfrac{1}{1+z^2}$ $(\pm\imath \neq z \in \mathbf{C})$. Ekkor $\alpha := 0$ megfelelő, ui. csak az $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+\imath y)|\,dy < +\infty$ korlátosság ellenőrzése jelent feladatot: $x > 0, a < -2, b > 2$ esetén

$$\int_a^b |F(x+\imath y)|\,dy = \int_{-2}^{2} |F(x+\imath y)|\,dy + \int_a^{-2} |F(x+\imath y)|\,dy + \int_2^b |F(x+\imath y)|\,dy \leq$$

$$\int_{-2}^{2} |F(x+\imath y)|\,dy + \int_a^{-2} \frac{dy}{|x+\imath y|^2} + \int_2^b \frac{dy}{|x+\imath y|^2} \leq$$

$$\int_{-2}^{2} |F(x+\imath y)|\,dy + \int_a^{-2} \frac{dy}{y^2} + \int_2^b \frac{dy}{y^2} =$$

$$\int_{-2}^{2} |F(x+\imath y)|\,dy + \frac{1}{2} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{2},$$

azaz $\lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b |F(x+\imath y)|\,dy \leq \int_{-2}^{2} |F(x+\imath y)|\,dy + 1 < +\infty$.

A 6.1. Tétel szerint tehát van olyan $f \in \mathcal{D}_L$ függvény, amelyre $Lf(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ $(z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0)$ és

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \frac{e^{tz}}{1+z^2}\,dz \qquad (t \geq 0),$$

ahol $x > 0$. Az utóbbi integrál kiszámításához legyen $b > 0$ és tekintsük az alábbi φ_b komplex utat:

$$\varphi_b(u) := \begin{cases} \ell_b(u) & (-b \leq u \leq b) \\ x + be^{\imath(u-b+\pi/2)} & (b \leq u \leq b+\pi). \end{cases} \tag{7.1}$$

(Tehát az ℓ_b által paraméterezett függőleges szakaszra, mint átmérőre egy félkört illesztettünk a $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \leq x\}$ félsíkban.) Ekkor a reziduum-tétel miatt rögzített $t \geq 0$ és elég nagy b mellett

$$\int_{\varphi_b} \frac{e^{tz}}{1+z^2}\,dz = 2\pi\imath \left(\operatorname{Res}_{\imath} \frac{e^{tz}}{1+z^2} + \operatorname{Res}_{-\imath} \frac{e^{tz}}{1+z^2} \right),$$

ahol

$$\frac{e^{tz}}{1+z^2} = \frac{e^{tz}}{2\imath}\left(\frac{1}{z-\imath} - \frac{1}{z+\imath}\right) = \frac{e^{t\imath}}{2\imath}\frac{e^{t(z-\imath)}}{z-\imath} - \frac{e^{-t\imath}}{2\imath}\frac{e^{t(z+\imath)}}{z-\imath} =$$

$$\frac{e^{t\imath}}{2\imath}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t(z-\imath))^k}{k!}\frac{1}{z-\imath} - \frac{e^{-t\imath}}{2\imath}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t(z+\imath))^k}{k!}\frac{1}{z+\imath}$$

miatt $\operatorname{Res}_{\imath} \dfrac{e^{tz}}{1+z^2} = \dfrac{e^{t\imath}}{2\imath}$ és $\operatorname{Res}_{-\imath} \dfrac{e^{tz}}{1+z^2} = -\dfrac{e^{-t\imath}}{2\imath}$. Következésképpen

$$\int_{\varphi_b} \frac{e^{tz}}{1+z^2}\,dz = 2\pi\imath\left(\frac{e^{t\imath}}{2\imath} - \frac{e^{-t\imath}}{2\imath}\right) = 2\pi\imath \sin t.$$

Mivel a φ_b út az ℓ_b „szakasz” és a $k_b(u) := x + be^{\imath(u-b+\pi/2)}$ $(b \le u \le b+\pi)$ (fent említett) „félkörív” egyesítése, ezért

$$2\pi\imath \sin t = \int_{\varphi_b} \frac{e^{tz}}{1+z^2}\,dz = \int_{\ell_b} \frac{e^{tz}}{1+z^2}\,dz + \int_{k_b} \frac{e^{tz}}{1+z^2}\,dz =: I_{1b} + I_{2b}.$$

Mutassuk meg, hogy $\lim_{b\to+\infty} I_{2b} = 0$. Ui.

$$I_{2b} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{t(x+be^{\imath u})}}{1+(x+be^{\imath u})^2} b\imath e^{\imath u}\,du,$$

azaz elég nagy b-re

$$|I_{2b}| \le be^{tx} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{|e^{tbe^{\imath u}}|}{|1+(x+be^{\imath u})^2|}\,du = be^{tx} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{tb\cos u}}{|1+(x+be^{\imath u})^2|}\,du \le$$

$$2be^{tx} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{tb\cos u}}{|x+be^{\imath u}|^2}\,du \le 2be^{tx} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{|x+b\cos u + \imath b \sin u|^2}\,du =$$

$$2be^{tx} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{du}{(x+b\cos u)^2 + (b\sin u)^2} =$$

$$2be^{tx} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{du}{x^2+b^2+2bx\cos u} \le \frac{8\pi be^{tx}}{b^2} \to 0 \qquad (b\to+\infty).$$

A fentiek szerint tehát

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \frac{e^{tz}}{1+z^2}\,dz = \lim_{b\to+\infty} \int_{\ell_b} \frac{e^{tz}}{1+z^2}\,dz = \lim_{b\to+\infty} I_{1b} = 2\pi\imath \sin t,$$

így

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \frac{e^{tz}}{1+z^2}\,dz = \sin t \qquad (t \ge 0)$$

(összhangban a 3.6. példában mondottakkal: $f = s_1$ és $Lf(z) = Ls_1(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ $(z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > 0)$).

7.2. Hasonlóan kezelhető az $F(z) := \dfrac{1}{z^2}$ $(0 \neq z \in \mathbf{C})$ függvény *Mellin*-transzformáltja is. Ui. könnyen ellenőrizhető, hogy az $\alpha := 0$ választás most is lehetséges. Az

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \frac{e^{tz}}{z^2}\,dz \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0)$$

integrált ugyanúgy számolhatjuk, mint az előbbi példában:

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \frac{e^{tz}}{z^2}\,dz = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_{\ell_b} \frac{e^{tz}}{z^2}\,dz + \int_{k_b} \frac{e^{tz}}{z^2}\,dz\right) =: \lim_{b\to+\infty}(I_{1b} + I_{2b}),$$

ahol most

$$\int_{\varphi_b} \frac{e^{tz}}{z^2}\,dz = 2\pi\imath\,\mathrm{Res}_0 \frac{e^{tz}}{z^2}.$$

Mivel

$$\mathrm{Res}_0 \frac{e^{tz}}{z^2} = \mathrm{Res}_0 \left(\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tz)^k}{k!}\right) = t,$$

ezért $\int_{\varphi_b} \frac{e^{tz}}{z^2}\,dz = 2\pi\imath t.$

Most is igaz, hogy $\lim_{b\to+\infty} I_{2b} = 0$, így

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \frac{e^{tz}}{z^2}\,dz = t \qquad (t \geq 0).$$

Ha $0 < n \in \mathbf{N}$ és $F(z) := \dfrac{1}{z^n}$ $(0 \neq z \in \mathbf{C})$, akkor pedig az előző számolás a következőképpen módosul: $t \geq 0, x > 0$ esetén

$$\mathrm{Res}_0 \frac{e^{tz}}{z^n} = \mathrm{Res}_0 \left(\frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tz)^k}{k!}\right) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

ill.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \frac{e^{tz}}{z^n}\,dz = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

(ld. 3.2., 3.3. példák).

7.3. Tekintsük valamely $0 \neq \omega \in \mathbf{R}$ mellett a $h(t) := t\cos(\omega t) \quad (t \geq 0)$ függvényt. Ekkor (ld. 3.2., ill. 3.4.) $h = gc_\omega$ (ahol $g(t) := t \quad (t \geq 0)$) és $Lg(z) = \dfrac{1}{z^2}$, $Lc_\omega(z) = \dfrac{z}{\omega^2 + z^2}$ $(z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0)$. A 6.1. v) megjegyzés alapján

$$Lh(z) = L(gc_\omega)(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \frac{\xi}{(\omega^2+\xi^2)(z-\xi)^2}\, d\xi \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0).$$

Az itt szereplő $\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \ldots$ integrál kiszámításához a korábbiakhoz hasonlóan az $[x-\imath b, x+\imath b]$ szakaszra, mint átmérőre illesszünk egy félkört a $\mathrm{Re}\,\xi \geq x$ félsíkban. Válasszuk x-et úgy, hogy a z hely elég nagy b-re már az előbb körüljárt félkörlemez belsejében legyen. Ekkor φ_b-vel jelölve a félkörlemeznek (az óramutató járásával ellentétesen irányított) határát a *Cauchy*-formulából

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \frac{\xi}{(\omega^2+\xi^2)(z-\xi)^2}\, d\xi = 2\pi\imath \lim_{b\to+\infty}\int_{\varphi_b} \frac{\xi}{(\omega^2+\xi^2)(z-\xi)^2}\, d\xi =$$

$$-2\pi\imath \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{\omega^2+\xi^2}\right)_{|\xi=z} = -2\pi\imath\frac{z^2-\omega^2}{(\omega^2+z^2)^2}.$$

Következésképpen

$$Lh(z) = \frac{\omega^2 - z^2}{(\omega^2+z^2)^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0).$$

A fenti példákban követett számolások speciális esetei az alábbi általános, a *Mellin*-transzformáltban szereplő integrál meghatározására is alkalmazható technikáknak. Ehhez szükségünk van (egy önmagában is érdekes) állításra:

7.1. Lemma (*Jordan*).

Tegyük fel, hogy az $F \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény valamilyen $a \in \mathbf{R}$ esetén a $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z \leq a\}$ félsíkon legfeljebb véges sok pont kivételével differenciálható és $\lim_{|z|\to+\infty} F(z) = 0$. Ekkor bármely $t > 0$ mellett

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_r} e^{tz}F(z)\, dz = 0,$$

ahol γ_r az $[a - r\imath, a + r\imath]$ szakaszra, mint átmérőre illesztett félkör a $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z \leq a\}$ félsíkban.

Bizonyítás. Legyen $\gamma_r(x) := a + re^{\imath x}$ $(\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2)$ az említett félkör egy paraméterezése. A komplex vonalintegrál definíciója alapján, ha r már „elég nagy”, akkor a

$$\mu_r := \max\{|F(\gamma_r(x))| : \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2\}$$

jelöléssel

$$\left|\int_{\gamma_r} e^{tz}F(z)\,dz\right| = \left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{t\gamma_r(x)}F(\varphi_r(x))r\imath e^{\imath x}\,dx\right| \leq$$

$$r\mu_r\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{t(a+r\cos x)}\,dx = r\mu_r e^{ta}\int_0^{\pi} e^{-tr\sin y}\,dy = 2r\mu_r e^{ta}\int_0^{\pi/2} e^{-tr\sin y}\,dy.$$

A gyakran használt $\sin y \geq 2y/\pi$ $(0 \leq y \leq \pi/2)$ egyenlőtlenség alapján tehát

$$2r\mu_r e^{ta}\int_0^{\pi/2} e^{-tr\sin y}\,dy \leq 2r\mu_r e^{ta}\int_0^{\pi/2} e^{-2try/\pi}\,dy = 2r\mu_r e^{ta}\frac{\pi}{2tr}\left(1 - e^{-tr}\right).$$

Következésképpen

$$\left|\int_{\gamma_r} e^{tz}F(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi e^{ta}}{t}\mu_r.$$

Mivel a feltétel szerint $\mu_r \to 0$ $(r \to +\infty)$, ezért a 7.1. Lemma állítása már következik. ■

A most belátott lemma alapján könnyen igazolható az alábbi

7.1. Tétel.

Tegyük fel, hogy valamilyen $a \in \mathbf{R}$ esetén az $F : \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \geq a\} \to \mathbf{C}$ differenciálható függvény analitikus kiterjesztése (amit szintén F-fel fogunk jelölni) a $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \leq a\}$ félsíkon eleget tesz a Jordan-lemma feltételeinek és F-nek az $\{a + \imath y \in \mathbf{C} : y \in \mathbf{R}\}$ egyenesen nincs szingularitása. Ekkor bármely $t > 0$ szám mellett a $H(z) := e^{tz}F(z)$ $(z \in \mathcal{D}_F)$ függvényre létezik az $\int_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} H(z)\,dz$ integrál és

$$\int_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} H(z)\,dz = 2\pi\imath\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}_{\xi_k} H,$$

ahol $\operatorname{res}_{\xi_k} H$ $(k = 1, ..., n\ (\in \mathbf{N}))$ jelenti a H függvény ξ_k-beli $(\operatorname{Re}\xi_k < a)$ reziduumát.

Bizonyítás. Ha $r > 0$ és a Γ_r szimbólum jelenti a 7.1. Lemmabeli γ_r félkör és az $[a - \imath r, a + \imath r]$ szakasz egyesítését (pozitív körüljárással), akkor („elég nagy” r mellett) a reziduum-tételből

$$\int_{\Gamma_r} H(z)\, dz = \int_{\gamma_r} e^{tz} F(z)\, dz + \int_{a-\imath r}^{a+\imath r} e^{tz} F(z)\, dz = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{\xi_k} H.$$

A 7.1. Lemma miatt itt $\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} e^{tz} F(z)\, dz = 0$, azaz

$$\int_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} H(z)\, dz = \lim_{r\to+\infty} \int_{a-\imath r}^{a+\imath r} e^{tz} F(z)\, dz = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{\xi_k} H. \blacksquare$$

7.1. Megjegyzések.

i) A 7.1. Lemmában szereplő $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z \leq a\}$ félsíkot kicserélve a „szimmetrikus” $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z \geq a\}$-ra kapjuk a lemma állítását $0 > t$-re. (Ennek megfelelően módosítható az 7.1. Tétel is.) Így pl. könnyen belátható, hogy a 6.1. Tételben szereplő $\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz}\, dz$ integrál minden $t < 0$ mellett nulla. Ui. az $[x-\imath r, x+\imath r]$ szakaszra, mint átmérőre a $\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z \geq x\}$ félsíkban félkört (γ_r) illesztve γ_r-nek és a szakasznak az egyesítéseként kapott (az óramutató járásával ellentétesen irányított) Γ_r zárt görbére (ld. *Cauchy*-tétel)

$$0 = \int_{\Gamma_r} F(z)e^{tz}\, dz = \int_{\gamma_r} F(z)e^{tz}\, dz - \int_{x-\imath r}^{x+\imath r} F(z)e^{tz} dz.$$

Következésképpen a 7.1. Lemma előbb megfogalmazott módosítása alapján

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(z)e^{tz} dz = \lim_{r\to+\infty} \int_{x-\imath r}^{x+\imath r} F(z)e^{tz} dz = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} F(z)e^{tz} dz = 0.$$

Mutassuk meg továbbá, hogy (ld. 6.1. Tétel) az

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(\xi)e^{t\xi} d\xi \qquad (t \geq 0, x > \alpha)$$

függvényre $Lf(z) = F(z)$ $(z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > \alpha)$. Válasszuk ui. ilyen z mellett x-et úgy, hogy $\alpha < x < \mathrm{Re}\, z$ (már láttuk, hogy az f-et definiáló integrál nem függ x-től). Ekkor

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}dt = \frac{1}{2\pi\imath}\int_0^{+\infty} e^{-tz}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(\xi)e^{t\xi}d\xi\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} F(\xi)\int_0^{+\infty} e^{-t(z-\xi)}dt\,d\xi$$

(ahol az integrálások felcserélhetőségét azok egyenletes konvergenciája biztosítja). Tehát

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tz}dt = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \frac{F(\xi)}{z-\xi}\,d\xi.$$

Legyen $r > 0$ olyan, hogy z a fent definiált Γ_r görbe belsejében van. Ekkor

$$\int_{\Gamma_r} \frac{F(\xi)}{z-\xi}\,d\xi = \int_{\gamma_r} \frac{F(\xi)}{z-\xi}\,d\xi - \int_{x-\imath r}^{x+\imath r} \frac{F(\xi)}{z-\xi}\,d\xi,$$

ahol a *Cauchy*-féle előállítási tétel miatt

$$\int_{\Gamma_r} \frac{F(\xi)}{z-\xi}\,d\xi = -2\pi\imath F(z).$$

Ha ξ a γ_r félkör pontja, azaz $|\xi - x| = r$, akkor $|z-\xi| \geq r - |z-x|$. Tehát $r \geq 2|z-x|$ esetén $|z-\xi| \geq r/2$. Ezért a $\rho_r := \max\{|F(\xi)| : |\xi - x| = r\}$ jelöléssel

$$\left|\int_{\gamma_r} \frac{F(\xi)}{z-\xi}\,d\xi\right| \leq \pi r\rho_r \max\{1/|z-\xi| : |\xi-x| = r\} \leq 2\pi\rho_r \to 0 \qquad (r \to +\infty).$$

Így

$$\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \frac{F(\xi)}{z-\xi}\,d\xi = \lim_{r\to+\infty}\int_{x-\imath r}^{x+\imath r} \frac{F(\xi)}{z-\xi}\,d\xi = 2\pi\imath F(z),$$

más szóval $Lf(z) = F(z)$.

ii) Az i) megjegyzésben mondottakhoz hasonlóan a 7.1. *Jordan*-lemmában (ill. a 7.1. Tételben) a „függőleges” félsíkok kicserélhetők „vízszintes” félsíkokra, amikor is a bizonyítások analóg módon végezhetők. Például *tegyük fel, hogy az* $F : \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\} \to \mathbf{C}$ függvény *véges sok hely kivételével differenciálható és* $\lim_{|z|\to+\infty} F(z) = 0$. *Ekkor tetszőleges* $t > 0$ *mellett*

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\Delta_r} e^{\imath tz}F(z)\,dz = 0,$$

ahol Δ_r *a* $[-r,r]$ *szakaszra, mint átmérőre illesztett félkör a* $\{z\in\mathbf{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ *félsíkban.*

Ennek megfelelően a fenti 7.1. Tétel alábbi változata igaz: *tételezzük fel, hogy a szóban forgó* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ *függvénynek a* $\{z\in\mathbf{C} : Im\, z\geq 0\}$ *félsíkra való analitikus kiterjesztése eleget tesz a 7.1. Lemma előbbi módosításának és a kiterjesztett függvénynek az* $\mathbf{R}$ *egyenesen nincs szingularitása. Ekkor bármely* $t>0$ *esetén*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\imath tx} f(x)\,dx = 2\pi\imath\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}_{\xi_k} G,$$

ahol a ξ_k*-k* $(k=1,\dots,n\,(\in\mathbf{N}))$ *a* $G(z):=e^{\imath tz}F(z)$ $(z\in\mathcal{D}_F)$ *függvény szinguláris helyei a* $\{z\in\mathbf{C} : \operatorname{Im} z\geq 0\}$ *félsíkban.*

iii) Példaként tekintsük az

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}\,dx \qquad (a>0, b>0)$$

integrált. Az *Euler*-formula miatt

$$I = \operatorname{Re}\tilde{I} := \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\imath ax}}{x^2+b^2}\,dx\right).$$

Az itt szereplő integrandus analitikus kiterjesztése a „felső” félsíkra a

$$G(z) := \frac{e^{\imath az}}{z^2+b^2} \qquad (\imath b\neq z\in\mathbf{C},\ \operatorname{Im} z\geq 0)$$

függvény, amelynek az egyetlen szinguláris helye: $\xi:=\imath b$. Ezért $\tilde{I}=2\pi\imath\operatorname{res}_\xi G$, ahol

$$G(z) = e^{\imath az}\frac{1}{(z+\imath b)(z-\imath b)} = \frac{e^{\imath az}}{2\imath b}\left(\frac{1}{z-\imath b}-\frac{1}{z+\imath b}\right) =$$

$$\frac{e^{\imath az}}{2\imath b(z-\imath b)} - \frac{e^{\imath az}}{2\imath b(z+\imath b)} \qquad (\imath b\neq z\in\mathbf{C},\ \operatorname{Im} z\geq 0).$$

A $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \ni z \mapsto \dfrac{e^{\imath a z}}{2\imath b(z+\imath b)}$ függvény analitikus, ezért

$$\operatorname{res}_\xi G = \frac{1}{2\imath b} e^{\imath a z}_{|z=\imath b} = \frac{1}{2\imath b} e^{-ab}.$$

Következésképpen

$$I = \operatorname{Re} \tilde{I} = 2\pi\imath \frac{1}{2\imath b} e^{-ab} = \frac{\pi}{b} e^{-ab}.$$

iv) Tekintsük most valamely $\omega \neq 0$ paraméterrel az

$$F(z) := \frac{\omega}{z^2+\omega^2} \qquad (\pm\imath\omega \neq z \in \mathbf{C})$$

függvényt (az $\omega = 1$ speciális esetben ld. 7.1. példa). A most említett példával kapcsolatban mondottakhoz hasonlóan kapjuk, hogy F-re alkalmazható a *Mellin*-transzformáció. Mivel F nyilván egyúttal az

$$\tilde{F}(z) := \frac{\omega}{z^2+\omega^2} \qquad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 0)$$

függvény analitikus kiterjesztése és bármely $a > 0$ szám esetén teljesülnek a 7.1. Lemma feltételei, ezért (ld. 7.1. Tétel) minden $0 < t$-re

$$\int_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} e^{tz} F(z)\, dz = 2\pi\imath(\operatorname{res}_{\imath\omega} H + \operatorname{res}_{-\imath\omega} H),$$

ahol

$$H(z) := e^{tz} F(z) = \frac{\omega e^{tz}}{z^2+\omega^2} = \frac{e^{tz}}{2\imath}\frac{1}{z-\imath\omega} - \frac{e^{tz}}{2\imath}\frac{1}{z+\imath\omega} \qquad (z \in \mathcal{D}_F).$$

Innen

$$\operatorname{res}_{\imath\omega} H = \frac{1}{2\imath} e^{tz}_{|z=\imath\omega} = \frac{e^{\imath t\omega}}{2\imath} \;\;,\;\; \operatorname{res}_{-\imath\omega} H = -\frac{1}{2\imath} e^{tz}_{|z=-\imath\omega} = -\frac{e^{-\imath t\omega}}{2\imath},$$

azaz

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} e^{tz} F(z)\, dz = \frac{e^{\imath t\omega} - e^{-\imath t\omega}}{2\imath} = \sin(\omega t) = s_\omega(t).$$

Tehát $Ls_\omega(z) = \dfrac{\omega}{z^2+\omega^2}$ $(z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0)$ (ld. 3.6. példa). Az $\omega = 1$ esetben természetesen visszakaptuk a 7.1. eredményt.

v) Tegyük most fel, hogy az $F \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ differenciálható függvényre $F(z) \to 0$ $(|z| \to +\infty)$ teljesül és alkalmas $R > 0, c_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N})$ paraméterekkel

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \qquad (z \in \mathbf{C}, |z| > R),$$

azaz F a ∞ egy megfelelő környezetében *Laurent*-sorba fejthető. Ekkor az

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n \qquad (t \geq 0)$$

utasítással értelmezett f függvény $\mathcal{D}_L$-beli és $Lf(z) = F(z)$ $(z \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}\, z > R)$. Ui. a c_n $(n \in \mathbf{N})$ *Laurent*-együtthatókra tetszőleges $r > R$ mellett

$$c_n = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\{|z|=r\}} F(z) z^{n-1}\, dz \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

tehát $|c_n| \leq M_r r^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$, ahol M_r olyan, hogy $|F(z)| \leq M_r/r$, hacsak $z \in \mathbf{C}$, $|z| \geq r$. (Mivel $F(z) \to 0$ $(|z| \to \infty)$, ezért ilyen M_r létezik.) Következésképpen

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_{n+1}| \frac{t^n}{n!} \leq M_r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(rt)^n}{n!} = M_r e^{rt} \qquad (t \geq 0),$$

így $f \in \mathcal{D}_L^r$ (ld. 1.1. ii) megjegyzés). Ezért bármely $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z > r$ esetén

$$\left| f(t) e^{-tz} \right| \leq M_r e^{-(\mathrm{Re}\, z - r)t} \qquad (t > 0).$$

Mivel a $0 < t \mapsto e^{-(\mathrm{Re}\, z - r)t}$ függvény $L^1(0, +\infty)$-beli, így (ld. 3.3.)

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-tz}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n},$$

tehát $f \in \mathcal{D}_L$ és $Lf(z) = F(z)$ $(z \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}\, z > R)$.

vi) Tekintsük a

$$J_n(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k} \qquad (t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

(elsőfajú) *Bessel*-függvényeket. Ekkor egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy

$$t^2 J_n''(t) + tJ_n'(t) + (t^2 - n^2)J_n(t) = 0 \qquad (t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}).$$

Az $F(z) := \dfrac{1}{\sqrt{z^2+1}}$ $(\pm\imath \neq z \in \mathbf{C})$ függvény (mint a valós $1 < x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ függvény közvetlen analitikus kiterjesztése) a ∞ körül *Laurent*-sorba fejthető:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{1}{z^{2k+1}} \qquad (z \in \mathbf{C}, |z| > 1)$$

(amiről a $\xi := 1/z$ helyettesítés, ill. a $\varphi(\xi) := \dfrac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}$, $\psi(\xi) := \sqrt{\xi^2+1}$ $(\xi \in \mathbf{C},\ |\xi| < 1)$ jelölések, valamint a ψ függvény (0-körüli) *Taylor*-sorba fejtése és a $\varphi = \psi'$ egyenlőség révén győződhetünk meg). Ezért a iv) megjegyzés szerint az $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!}t^n$ $(t > 0)$ függvényre $Lf(z) = F(z)$ $(z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 1)$. Mivel

$$f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!}t^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{2k+1}}{(2k)!}t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = J_0(t) \qquad (t > 0),$$

ezért $LJ_0(z) = F(z)$ $(z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 1)$.

vii) Az $LJ_0(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z^2+1}}$ $(z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 1)$ egyenlőséghez a következőképpen is eljuthatunk. A *Laplace*-transzformáció és a derivált kapcsolatáról szóló tételek (ld. 4.3., ill. 4.4. Tétel) alapján

$$LJ_0'(z) = zLJ_0(z) - J_0(z) = zLJ_0(z) - 1,$$

$$LJ_0''(z) = z^2LJ_0(z) - zJ_0(z) - J_0'(z) = z^2LJ_0(z) - z,$$

ill.

$$L(hJ_0)(z) = -(LJ_0)'(z)\ ,\ L(hJ_0'')(z) = -(LJ_0'')'(z) = 2zLJ_0(z) - z^2(LJ_0)'(z) + 1$$

(ahol $h(t) := t \ \ (t \geq 0)$). Innen azt kapjuk, hogy

$$L(hJ_0'' + J_0' + hJ_0)(z) = -(z^2+1)(LJ_0)'(z) - zLJ_0(z),$$

amiből meg az v)-beli differenciálegyenlet ($n = 0$ eset) alapján

$$(z^2+1)(LJ_0)'(z) + zLJ_0(z) = 0.$$

Tehát

$$\frac{(LJ_0)'(z)}{LJ_0(z)} = -\frac{z}{z^2+1} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 1).$$

Ezért

$$\log(LJ_0(z)) = -\frac{1}{2}\log(z^2+1) + \tilde{c},$$

azaz $LJ_0(z) = \dfrac{c}{\sqrt{z^2+1}}$, ahol a $c := e^{\tilde{c}}$ konstanst a (ld. 4.4. iv) megjegyzés)

$$\lim_{x\to+\infty}(xLJ_0(x)) = \lim_{x\to+\infty}\frac{cx}{\sqrt{x^2+1}} = c = \lim_{t\to 0} J_0(t) = 1$$

egyenlőségből kapjuk: $c = 1$. Innen (a *Bessel*-függvények deriváltjaira vonatkozó v)-beli összefüggést felhasználva) teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$LJ_n(z) = \frac{\left(\sqrt{z^2+1} - z\right)^n}{\sqrt{z^2+1}} \qquad (n \in \mathbf{N}\,,\ z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 1).$$

viii) A fentiek, ill. a 4.4. Tétel és 3.6. szerint

$$L(J_0 * J_0)(z) = LJ_0(z) \cdot LJ_0(z) = \frac{1}{z^2+1} = L\sin(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 1),$$

azaz $J_0 * J_0(x) = \int_0^x J_0(t)J_0(x-t)\,dt = \sin\, x \ \ (x \geq 0)$.

ix) Hasonlóan „kezelhető” az

$$F(z) := \frac{1}{z}e^{-1/z} \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C})$$

függvény. Ekkor F differenciálható, $\lim_{|z|\to+\infty} F(z) = 0$ és

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{z^n} \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C}),$$

azaz $R > 0$ és $c_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$ $(1 \leq n \in \mathbf{N})$. A iv) megjegyzés szerint tehát $Lf(z) = F(z)$ $(z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0)$, ahol

$$f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{2\sqrt{t}}{2}\right)^{2k} = J_0(2\sqrt{t}) \qquad (t \geq 0).$$

x) Végül mutassuk meg, hogy ha $f(t) := \sin(2\sqrt{t})$ $(t \geq 0)$, akkor

$$Lf(z) = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{\pi}{z}}e^{-1/z} \qquad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 0).$$

Ehhez fejtsük sorba az f függvényt:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{n+1/2}.$$

A 3.1. iii) megjegyzés szerint a $g_n(t) := t^{n+1/2}$ $(t \geq 0, n \in \mathbf{N})$ függvényekre

$$Lg_n(z) = \frac{\Gamma(n+3/2)}{z^{n+3/2}} \qquad (z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 0),$$

ahol $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ alapján teljes indukcióval

$$\Gamma(n+3/2) = \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}.$$

Ezért

$$Lf(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} Lg_n(z) = \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n! z^{n+3/2}} =$$

$$\frac{1}{z}\sqrt{\frac{\pi}{z}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n .$$

8. A Laplace-transzformált alkalmazásai.

8.1. Speciális kezdetiérték-problémák.

Adott $0 < n \in \mathbf{N}, f \in \mathcal{D}_L,\ a_0, ..., a_n \in \mathbf{R},\ a_n \neq 0$ mellett oldjuk meg a következő kezdetiérték-problémát:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = f(t) \qquad (t \geq 0), \\ \\ y^{(k)}(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, ..., n-1). \end{cases}$$

Feltesszük, hogy $y^{(n)} \in \mathcal{D}_L$, ekkor (ld. 4.4. Tétel) egy alkalmas $q \in \mathbf{R}$ esetén

$$Ly^{(k)}(z) = z^k Ly(z) - \sum_{j=0}^{k-1} y^{(j)}(0) z^{k-j-1} = z^k Ly(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > q),$$

azaz

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(z^k Ly(z)\right) = Lf(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > q).$$

Ha $P(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (z \in \mathbf{C})$ (a feladat *karakterisztikus polinom*ja), akkor

(8.1.1) $$Ly(z)P(z) = Lf(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > q).$$

Innen (pl. *Mellin*-transzformációval) y meghatározható.

8.1.1. Megjegyzések.

i) Különösen egyszerű esettel állunk szemben, ha az előbbi P polinom $\xi_1, ..., \xi_n$ gyökei páronként különbözőek. Ekkor (parciális törtekre bontással)

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{z-\xi_j} \qquad (z \in \mathbf{C}, P(z) \neq 0).$$

Itt $k = 1, ..., n$ esetén alkalmas $r_k > 0$ mellett

$$d_k + \sum_{k\neq j=1}^{n} \frac{d_j(z-\xi_k)}{z-\xi_j} = \frac{z-\xi_k}{P(z)} = \frac{1}{\frac{P(z)-P(\xi_k)}{z-\xi_k}} \qquad (z \in \mathbf{C}, 0 < |z-\xi_k| < r_k),$$

ahonnan

$$\lim_{z\to\xi_k} \sum_{k\neq j=1}^{n} \frac{d_j(z-\xi_k)}{z-\xi_j} = 0\ ,\ \lim_{z\to\xi_k} \frac{P(z)-P(\xi_k)}{z-\xi_k} = P'(\xi_k) \neq 0$$

miatt $d_k = 1/P'(\xi_k)$. Tehát $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \max\{q,\ \operatorname{Re}\xi_1, ...,\ \operatorname{Re}\xi_n\}$ esetén

$$Ly(z) = Lf(z) \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_k)(z-\xi_j)} = Lf(z)LQ(z),$$

ahol (ld. 3.4., ill. 4.1. Tétel)

$$Q(t) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} e^{t\xi_j} \qquad (t \geq 0).$$

Következésképpen (ld. 5.1. Tétel) $y = f * Q$.

ii) Oldjuk meg a fentiek szerint pl. az alábbi igen egyszerű („teszt-”) feladatot:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t \qquad (t \geq 0), \\ \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Ekkor

$$P(z) = z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2) \qquad (z \in \mathbf{C}),$$

ill. $P'(z) = 2z - 3$ $(z \in \mathbf{C})$ miatt $P'(1) = -1$ és $P'(2) = 1$. Ezért

$$Q(t) = -e^t + e^{2t} \qquad (t \geq 0),$$

így

$$y(x) = f * Q(x) = \int_0^x (x-t)(e^{2t} - e^t)\, dt = \frac{e^{2x}}{4} - e^x + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

iii) Ha a P polinom gyökei között azonosak is vannak, akkor legyenek valamilyen $p = 1, ..., n$ esetén a páronként különböző gyökök $\xi_1, ..., \xi_p$, rendre a $\mu_1, ..., \mu_p$ multiplicitással (Ekkor tehát minden $m = 1, ..., p$ indexre $\mu_m \in \{1, ..., n\}$ és $\sum_{m=1}^{p} \mu_m = n$.) Ez azt jelenti, hogy alkalmas $c_{im} \in \mathbf{C}$ $(m = 1, ..., p$, ill. $i = 1, ..., \mu_m)$ együtthatókkal az $1/P$ hányadosra a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{c_{im}}{(z - \xi_m)^i} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_n\}).$$

Az itt szereplő c_{im}-ekről a következőket tudjuk mondani: legyen $l = 1, ..., p$ és $z \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_{l-1}, \xi_{l+1}, ..., \xi_n\}$ esetén

$$R_l(z) := \sum_{j=0}^{\mu_l - 1} c_{\mu_l - j l}(z - \xi_l)^j + (z - \xi_l)^{\mu_l} \sum_{l \neq m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{c_{im}}{(z - \xi_m)^i} =:$$

$$\sum_{j=0}^{\mu_l - 1} c_{\mu_l - j l}(z - \xi_l)^j + (z - \xi_l)^{\mu_l} Q_l(z).$$

Ekkor

$$R_l(z) = \frac{(z - \xi_l)^{\mu_l}}{P(z)} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_n\}),$$

ill. alkalmas $r > 0$ mellett a $K_r(\xi_l) := \{z \in \mathbf{C} : |z - \xi_l| < r\}$ körlemezen a Q_l függvény nyilván differenciálható. Ezért $K_r(\xi_l)$-en *Taylor*-sorba fejtve azt mondhatjuk, hogy

$$R_l(z) = \sum_{j=0}^{\mu_l - 1} c_{\mu_l - j l}(z - \xi_l)^j + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^{(k)}(\xi_l)}{k!}(z - \xi_l)^{k + \mu_l} =$$

$$\sum_{j=0}^{\mu_l-1} c_{\mu_l-jl}(z-\xi_l)^j + \sum_{k=\mu_l}^{\infty} \frac{Q^{(k-\mu_l)}(\xi_l)}{(k-\mu_l)!}(z-\xi_l)^k \qquad (z \in K_r(\xi_l)).$$

Ez utóbbi sorfejtés nem más, mint az R_l függvény ξ_l-körüli *Taylor*-sora, így

$$c_{\mu_l-jl} = \frac{R_l^{(j)}(\xi_l)}{j!} \qquad (j = 0, ..., \mu_l - 1).$$

Ha tehát $m = 1, ..., p$ és $i = 1, ..., \mu_m$, akkor (ld. **3.** pont, ill. 4. Tétel)

$$L\left(\frac{\exp^{\xi_m} h_{i-1}}{(i-1)!}\right)(z) = \frac{1}{(z-\xi_m)^i} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \xi_m),$$

ahol $h_{i-1}(t) := t^{i-1}$ $(t \geq 0)$. Ezért az $1/P$ függvény előbbi parciális törtekre bontott alakjából $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \xi_m$ $(m = 1, ..., p)$ esetén

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} L\left(\frac{c_{im} \exp^{\xi_m} h_{i-1}}{(i-1)!}\right)(z).$$

Következésképpen a

$$Q(t) := \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{c_{im}}{(i-1)!} e^{t\xi_m} t^{i-1} \qquad (t \geq 0)$$

függvénnyel $LQ = 1/P$ és (ld. i)) $y = f * Q$. Tekintsük pl. az alábbi feladatot:

$$\begin{cases} y'''(t) - 4y''(t) + 5y'(t) - 2y(t) = t & (t \geq 0), \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

Ebben a feladatban a karakterisztikus polinom a következő:

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 5z - 2 = (z-1)^2(z-2) \qquad (z \in \mathbf{C}).$$

Továbbá

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{1, 2\}),$$

amiből a Q-ra kapott előző formula alapján

$$Q(t) = e^{2t} - (t+1)e^t \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen

$$y(x) = f * Q(x) = \int_0^x (x-t)(e^{2t} - (t+1)e^t)dt =$$

$$\frac{e^{2x}}{4} + (1-x)e^x - \frac{x}{2} - \frac{5}{4} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

8.2. Lineáris differenciaegyenletek.

Az előbbiek analógiájára tárgyaljuk röviden a *lineáris differenciaegyenletek* megoldását a Laplace-transzformáció segítségével. Vizsgáljuk először a „folytonos" esetet: adott $f \in \mathcal{D}_L$, $n \in \mathbf{N}$ és $c_0, ..., c_n \in \mathbf{C}$, $c_n \neq 0$ mellett keressünk olyan $y : [0, +\infty) \to \mathbf{C}$ függvényt, amelyre

(8.2.1)
$$\sum_{k=0}^{n} c_k y(t+k) = f(t) \qquad (t \geq 0).$$

Feltesszük, hogy az y függvény „kezdeti értékei", az $y(t)$ $(0 \leq t < n)$ helyettesítési értékek ismertek. Az $n = 0$ eset nyilván érdektelen, ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy $n > 0$. Az is feltehető, hogy $c_0 \neq 0$. Ha ui. valamilyen $s = 1, ..., n$ esetén $c_j = 0$ $(j = 0, ..., s-1)$ és $c_s \neq 0$, akkor (8.2.1) a következő alakú:

$$\sum_{k=s}^{n} c_k y(t+k) = \sum_{k=0}^{n-s} \tilde{c}_k \tilde{y}(t+k) = f(t) \qquad (t \geq 0),$$

ahol $\tilde{c}_k := c_{k+s}$ $(k \in \mathbf{N})$, $\tilde{y}(t) := y(t+s)$ $(t \geq 0)$ és $\tilde{c}_0 = c_s \neq 0$. Világos, hogy ha a Δ *differenciaoperátort* a $\Delta y(t) := y(t+1)$ $(t \geq 0)$ definícióval értelmezzük, akkor alkalmas $a_0, ..., a_n \in \mathbf{C}$ együtthatókkal a fenti „egyenlet" ekvivalens a következővel:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Delta^k y = f.$$

1° Elsőként az $y(t) = 0 \ \ (0 \le t < n)$ „kezdeti feltétellel" élve abból indulunk ki, hogy $y \in \mathcal{D}_L$. Nyilvánvaló, hogy a (8.2.1) „egyenlet" egyértelműen meghatározza y-t, hiszen a $j = 0, 1, ...$ választással

$$y(t+n) = \frac{1}{c_n}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k y(t+k)\right) \qquad (j \le t < j+1),$$

amiből a „kezdeti feltételt" figyelembe véve teljes indukcióval kapjuk az y függvény értékeit valamennyi $[j, j+1)$ intervallumon, azaz $[0, +\infty)$-en. Speciálisan

$$y(t) = \frac{1}{c_n} f(t-n) \qquad (n \le t < n+1).$$

A 4.2. Tétel iii) pontja szerint (8.2.1)-ből alkalmas $q > 0$ választással

$$Lf(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{kz}\left(Ly(z) - \int_0^k y(t)e^{-tz}dt\right) =$$

$$Ly(z)\sum_{k=0}^{n} c_k e^{kz} = P(e^z)Ly(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > q),$$

ahol $P(s) := \sum_{k=0}^{n} c_k s^k \quad (s \in \mathbf{C})$ (a szóban forgó (8.2.1) differenciaegyenlet *karakterisztikus polinomja*). Tegyük fel először, hogy a P polinom $\xi_1, ..., \xi_n$ gyökei páronként különbözőek. Ekkor (ld. 8.1.1. i) megjegyzés)

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)(z-\xi_j)} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_n\}),$$

így

$$Ly(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{Lf(z)}{P'(\xi_j)(e^z - \xi_j)} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_n\},\ \operatorname{Re} z > q).$$

Az $Lf(z)/(e^z - \xi_j) \quad (j = 1, ..., n)$ hányadosakat $|\xi_j e^{-z}| < 1$, azaz $|\xi_j| < e^{\operatorname{Re} z}$ $(j = 1, ..., n)$ esetén (ami feltehető)

$$\frac{Lf(z)}{e^z - \xi_j} = Lf(z)e^{-z}\frac{1}{1 - \xi_j e^{-z}} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_j^{k-1} Lf(z)e^{-kz}$$

alakban írva a 4.2. Tétel i) állítása alapján

$$\frac{Lf(z)}{e^z-\xi_j}=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_j^{k-1}L(\tau_k f)(z)$$

adódik. Tehát azt írhatjuk, hogy

$$Ly(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{P'(\xi_j)}\sum_{k=1}^{\infty}\xi_j^{k-1}L(\tau_k f)(z).$$

Feltételezzük, hogy a fenti második szummában (végtelen sorban) az összegzés és az L operátor felcserélhető. Ez a helyzet pl. akkor, ha $\int_0^{+\infty}|f(t)|\,dt<+\infty$. Ui. $j=1,\dots,n$ esetén

$$L\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_j^{k-1}\tau_k f\right)(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{l}\xi_j^{k-1}\int_l^{l+1}f(t-k)e^{-tz}dt,$$

ahol

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{l}\left|\xi_j^{k-1}\int_l^{l+1}f(t-k)e^{-tz}dt\right|=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{l}\left|\xi_j^{k-1}e^{-kz}\int_{l-k}^{l-k+1}f(t)e^{-tz}dt\right|=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_j^{k-1}e^{-kz}|\sum_{l=k}^{\infty}\left|\int_{l-k}^{l-k+1}f(t)e^{-tz}dt\right|\le$$

$$|e^{-z}|\sum_{k=0}^{\infty}\left|\xi_j e^{-z}\right|^k\int_0^{+\infty}|f(t)|\,dt<+\infty.$$

Következésképpen

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{l}\xi_j^{k-1}\int_l^{l+1}f(t-k)e^{-tz}dt=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_j^{k-1}\sum_{l=k}^{\infty}\int_l^{l+1}f(t-k)e^{-tz}dt=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_j^{k-1}\int_k^{\infty}f(t-k)e^{-tz}dt=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_j^{k-1}\int_0^{\infty}\tau_k f(t)e^{-tz}dt=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_j^{k-1} L(\tau_k f)(z).$$

A fentiek szerint $z \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_n\}$, $\operatorname{Re} z > q$ esetén

$$Ly(z) = L\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_j^{k-1} \tau_k f\right)(z).$$

Más szóval

$$y(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < n) \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_j^{k-1} \tau_k f(t) & (t \geq n). \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy a $\tau_b f \quad (b \geq 0)$ „eltólt” függvény értelmezését (ld. 4.2. Tétel) figyelembe véve minden $k = 1, 2, ...$ esetén $\tau_k f(t) = 0 \quad (t < k)$. Ezért

$$y(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < n) \\ \sum_{k=1}^{[t]} f(t-k) \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j^{k-1}}{P'(\xi_j)} & (t \geq n). \end{cases}$$

2$^{\mathbf{o}}$ Ha (ld. 8.1.1. i) megjegyzés)

$$Q(t) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} e^{t\xi_j} \qquad (t \geq 0),$$

akkor nyilván

$$y(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < n) \\ \sum_{k=1}^{[t]} f(t-k) Q^{(k-1)}(0) & (t \geq n). \end{cases}$$

Belátható, hogy az előbbi „megoldó képlet” érvényben marad akkor is, ha a $\xi_1, ..., \xi_n$ gyökök között vannak azonosak, feltéve, hogy Q eleget tesz az $LQ = 1/P$ összefüggésnek. Ha ui. valamilyen $p = 1, ..., n$ esetén most $\xi_1, ..., \xi_p$ jelenti a P polinom páronként különböző gyökeit rendre $\mu_1, ..., \mu_p$ multiplicitással, akkor alkalmas $c_{im} \in \mathbf{C} \quad (m = 1, ..., p$, ill. $i = 1, ..., \mu_m)$ együtthatókkal

$$\frac{1}{P(s)} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{c_{im}}{(s-\xi_m)^i} \qquad (s \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_m\}).$$

Következésképpen a fentiek szerint

$$Ly(z) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} \frac{Lf(z)}{(e^z-\xi_m)^i} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} e^{-iz} \frac{Lf(z)}{(1-\xi_m e^{-z})^i} =$$

$$\sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} e^{-z} Lf(z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (i+k-1)}{k!} (\xi_m e^{-z})^k =$$

$$\sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} Lf(z) \sum_{j=i}^{\infty} \frac{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (j-1)}{(j-i)!} \xi_m^{j-i} e^{-jz},$$

hacsak $x \in \mathcal{D}_{Ly} \cap \mathcal{D}_{Lf} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_m\}$ és $|\xi_m e^{-z}| < 1 \quad (m = 1, ..., p)$. (Ez utóbbi feltételek alkalmas $q > 0$ mellett teljesülnek, ha $z \in \mathbf{C}$ és $\operatorname{Re} z > q$.) Tehát

$$Ly(z) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i)!} \xi_m^{j-i} L(\tau_j f)(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > q).$$

Megint csak feltételezve az itt szereplő végtelen sor és a *Laplace*-transzformáció felcserélhetőségét azt mondhatjuk, hogy $t \geq 0$ esetén

$$y(t) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} \sum_{j=i}^{\infty} \binom{j-1}{i-1} \xi_m^{j-i} \tau_j f(t) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau_j f(t) \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{j \wedge \mu_m} c_{im} \binom{j-1}{i-1} \xi_m^{j-i} = \sum_{j=1}^{[t]} f(t-j) \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{j \wedge \mu_m} c_{im} \binom{j-1}{i-1} \xi_m^{j-i}.$$

Lássuk be, hogy ha $LQ = 1/P$, akkor

$$\sum_{i=1}^{j \wedge \mu_m} c_{im} \binom{j-1}{i-1} \xi_m^{j-i} = Q^{(j-1)}(0) \qquad (j = 1, 2, ...).$$

Számítsuk ki ehhez Q-t (ld. iii)):

$$Q(t) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{c_{im}}{(i-1)!} e^{t\xi_m} t^{i-1} \qquad (t \geq 0).$$

Innen a *Leibniz*-féle deriválási szabály alkalmazásával

$$Q^{(j-1)}(0) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{c_{im}}{(i-1)!} \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} \left(\exp^{\xi_m}\right)^{(j-1-k)} (0) h_i^{(k)}(0).$$

Világos, hogy $k \neq i-1$ esetén $h_i^{(k)}(0) = 0$, ill. $h_i^{(i-1)}(0) = (i-1)!$, továbbá $\left(\exp^{\xi_m}\right)^{(j-1-k)}(0) = \xi_m^{j-1-k}$. Így

$$Q^{(j-1)}(0) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{c_{im}}{(i-1)!} \binom{j-1}{i-1} \xi_m^{(j-i)} (i-1)!,$$

amit állítottunk.

3

3° Tekintsük most a (8.2.1) differenciaegyenlet „homogén” változatát tetszőleges „kezdeti feltétel” mellett: $f \equiv 0$, így

$$\sum_{k=0}^{n} c_k y(t+k) = 0 \qquad (t \geq 0),$$

ahol adottak az $y(t) \quad (0 \leq t < n)$ függvényértékek. Az 1^o-ben látottaknak megfelelően most

$$P(e^z) Ly(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{kz} \int_0^k y(t) e^{-tz} dt = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{kz} Ly_k(z),$$

azaz (feltéve, hogy a P polinom valamennyi gyöke egyszeres)

$$Ly(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{l=1}^{\infty} \xi_j^{l-1} e^{(k-l)z} Ly_k(z) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{l=1}^{k} \xi_j^{l-1} e^{(k-l)z} Ly_k(z) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{l=k+1}^{\infty} \xi_j^{l-1} L(\tau_{l-k} y_k)(z) =:$$

$$A(z) + B(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > q),$$

ahol $y_k := y \cdot \chi_{[0,k)}$ $(k = 0, ..., n)$. Most is feltételezzük, hogy a $\sum_{l=k+1}^{\infty} ...$ sorösszegzés és az L operátor felcserélhető, így azt mondhatjuk, hogy a

$$g(t) := \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{l=k+1}^{\infty} \xi_j^{l-1} \tau_{l-k} y_k(t) \qquad (t \geq 0)$$

függvénnyel $B = Lg$. Ha $t \geq 0, k = 1, ..., n$ és $l = k+1, k+2, ...,$ akkor

$$\tau_{l-k} y_k(t) = \begin{cases} y_k(t-l+k) & (t \geq l-k) \\ 0 & (0 \leq t < l-k). \end{cases}$$

Mivel $y_k(t-l+k) = 0$, ha $t-l+k \geq k$, azaz $t \geq l$, ezért a $g(t)$-t definiáló előbbi összegben legfeljebb $t < l \leq t+k$ esetén lesz $y_k(t-l+k) \neq 0$. Következésképpen

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{t<l\leq t+k} \xi_j^{l-1} y(t-l+k) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{m=1}^{k} \xi_j^{[t]-m+k} y(t-[t]+m-1) =$$

$$\sum_{m=1}^{n} y(t-[t]+m-1) \sum_{k=m}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \xi_j^{[t]-m+k} =$$

$$\sum_{m=1}^{n} y(t-[t]+m-1) \sum_{l=0}^{n-m} c_{m+l} \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j^{[t]+l}}{P'(\xi_j)} =$$

$$\sum_{m=1}^{n} y(t-[t]+m-1) \sum_{l=0}^{n-m} c_{m+l} Q^{([t]+l)}(0) \qquad (t \geq 0).$$

Feltesszük, hogy az y_k $(k = 1, ..., n)$ „kezdeti” függvényekre és A-ra alkalmazható a *Mellin*-transzformáció (ld. 6.1. Tétel). Ekkor $A = Lh$, ahol (alkalmas $q > 0$ paraméterrel) bármely $x > q$ esetén

$$h(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} A(z)e^{tz}dz =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\xi_j)} \sum_{l=1}^{k} \xi_j^{l-1} \frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} e^{(k-l+t)z} Ly_k(z)\,dz \qquad (t \geq 0).$$

A feltételeink szerint (az előbbi k, j, l indexekre)

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} e^{(k-l+t)z} Ly_k(z)\,dz = y_k(k-l+t) \qquad (t \geq 0).$$

Mivel $k - l \geq 0$, ha $k = 1, ..., n$, ill. $l = 1, ..., k$, így bármely $t \geq n$ helyen $k - l + t \geq k$, azaz $y_k(k - l + t) = 0$. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy $h(t) = 0 \quad (t \geq n)$. Az $y = g + h$ egyenlőség alapján ezért $y(t) = g(t) \quad (t \geq n)$.

Ha a P gyökei között vannak többszörös gyökök is, akkor (ld. 2^o az ottani jelölésekkel)

$$Ly(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} \frac{e^{kz}Ly_k(z)}{(e^z - \xi_m)^i} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (i+l-2)}{(l-1)!} \xi_m^{l-1} e^{(k-l)z} Ly_k(z) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} \sum_{l=1}^{k} \frac{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (i+l-2)}{(l-1)!} \xi_m^{l-1} e^{(k-l)z} Ly_k(z) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (i+l-2)}{(l-1)!} \xi_m^{l-1} L(\tau_{l-k} y_k)(z) =:$$

$$\widetilde{A}(z) + \widetilde{B}(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > q).$$

Ha

$$\widetilde{g}(t) := \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (i+l-2)}{(l-1)!} \xi_m^{l-1} \tau_{l-k} y_k(t) \qquad (t \geq 0),$$

akkor $\widetilde{B} = L\widetilde{g}$. Az egyszeres gyökök esetével analóg módon kapjuk, hogy tetszőleges $0 \leq t$-re

$$\widetilde{g}(t) := \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} \sum_{t<l\leq t+k} \frac{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (i+l-2)}{(l-1)!} \xi_m^{l-1} y(t-l+k) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} c_{im} \sum_{r=1}^{k} \frac{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (i+[t]-r+k-1)}{([t]-r+k)!} \xi_m^{[t]-r+k} y(t-[t]+r-1) =$$

$$\sum_{r=1}^{n} y(t-[t]+r-1) \sum_{k=r}^{n} c_k \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (i+[t]-r+k-1) c_{im}}{([t]-r+k)!} \xi_m^{[t]-r+k} =$$

$$\sum_{r=1}^{n} y(t-[t]+r-1) \sum_{l=0}^{n-r} c_{l+r} \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (i+[t]+l-1) c_{im}}{([t]+l)!} \xi_m^{[t]+l}.$$

A 2^o-ben mondottak szerint viszont

$$\sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (i+[t]+l-1) c_{im}}{([t]+l)!} \xi_m^{[t]+l} = Q^{([t]+l)}(0),$$

hacsak a differenciálható Q függvény eleget tesz az $LQ = 1/P$ összefüggésnek. Tehát

$$\widetilde{g}(t) = \sum_{r=1}^{n} y(t-[t]+r-1) \sum_{l=0}^{n-r} c_{l+r} Q^{([t]+l)}(0) \qquad (t \geq 0)$$

(ami formailag megegyezik az egyszeres gyökök esetében kapott előállítással). Az $\widetilde{A} = L\widetilde{h}$ egyenlőség szerinti $\widetilde{h}$-ra az egyszeres gyökök esetével megegyezően adódik, hogy $\widetilde{h}(t) = 0$ $(t \geq n)$, ezért $y = \widetilde{g} + \widetilde{h}$ miatt $y(t) = \widetilde{g}(t) \quad (t \geq n)$.

Világos, hogy a (8.2.1) „inhomogén" egyenlet megoldását tetszőleges kezdeti feltétel esetén a homogén egyenlet 3^o-beli megoldásának és a (8.2.1) 2^o-beli megoldásának az összegeként kapjuk.

4° A fentiekben vizsgált (8.2.1) differenciaegyenlet „diszkrét” változós variánsa a következő (megtartva az eddigi jelöléseket): adott $(b_\nu) : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ sorozat mellett keressük azt az $(x_\nu) : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ sorozatot, amelyre

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x_{\nu+k} = b_\nu \qquad (\nu \in \mathbf{N}). \tag{8.2.2}$$

Ekkor az $x_0, ..., x_{n-1}$ „kezdeti értékek” megadásával (8.2.2) egyértelműen meghatározza az (x_ν) sorozatot:

$$x_{\nu+n} = \frac{1}{c_n}\left(b_\nu - \sum_{k=0}^{n-1} c_k x_{\nu+k}\right) \qquad (\nu \in \mathbf{N}).$$

Nyilvánvaló, hogy az $f(t) := b_\nu \quad (\nu \le t < \nu + 1 \quad (\nu \in \mathbf{N}))$ választással kapott (8.2.1) egyenlet minden y megoldása a (8.2.2) egyenlet $x_\nu := y(\nu) \quad (\nu \in \mathbf{N})$ megoldását szolgáltatja. Továbbá a (8.2.2)-nak eleget tevő bármely (x_ν) sorozatból a (8.2.1) egyenlet $y(t) := x_\nu \quad (\nu \le t < \nu + 1 \quad (\nu \in \mathbf{N}))$ megoldását kapjuk. Ezért (8.2.2) megoldásaihoz 2^o, ill. 3^o alapján juthatunk el, az ott mondott formulákat a $t := \nu \quad (\nu \in \mathbf{N})$ helyeken alkalmazva.

5° Mutassuk be a *Laplace*-operátor alkalmazását a (8.2.2) differenciaegyenlet megoldására a 3^o-ban és 4^o-ben mondottaktól függetlenül. Tekintsük ehhez a (8.2.2)-nak eleget tevő valamely (x_ν) sorozatból a 4^o-ben „gyártott”

$$f(t) := b_\nu\ ,\ y(t) := x_\nu \qquad (\nu \le t < \nu + 1 \ \ (\nu \in \mathbf{N}))$$

függvényeket, ill. a (8.2.1) egyenletet az

$$y(t) = x_k \qquad (k \le t < k + 1 \quad (k = 0, ..., n-1))$$

„kezdeti feltétellel”. Ekkor a fentebb már alkalmazott „szabályok” szerint $z \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} z > q$ esetén (alkalmas $q > 0$ mellett)

$$Lf(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{kz}\left(Ly(z) - \int_0^k y(t)e^{-tz}dt\right) =$$

$$Ly(z)P(e^z) - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{kz} \int_0^k y(t)e^{-tz}dt =$$

$$Ly(z)P(e^z) - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{kz} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_j}{z} \left(e^{-jz} - e^{-(j+1)z} \right)$$

(ahol a P polinomot 1^o-ben definiáltuk). Következésképpen

$$Ly(z) = \frac{Lf(z)}{P(e^z)} + \frac{1}{P(e^z)} \sum_{k=1}^{n} c_k e^{kz} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_j}{z} \left(e^{-jz} - e^{-(j+1)z} \right) =$$

$$\frac{Lf(z)}{P(e^z)} + \frac{e^z - 1}{zP(e^z)} \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=0}^{k-1} x_j e^{(k-j-1)z} =$$

$$\frac{Lf(z)}{P(e^z)} + \frac{e^z - 1}{zP(e^z)} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{k=j+1}^{n} c_k e^{(k-j-1)z}.$$

Ha itt a P polinom $\xi_1, ..., \xi_n$ gyökei páronként különbözőek, akkor (ld. 1^o és 2^o)

$$\frac{Lf(z)}{P(e^z)} = Ly_1(z),$$

ahol

$$y_1(t) := \sum_{k=1}^{[t]} f(t-k) Q^{(k-1)}(0) = \sum_{k=1}^{[t]} f(t-k) \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j^{k-1}}{P'(\xi_j)} \qquad (t \geq 0).$$

Továbbá a

$$P_j(s) := \sum_{k=j+1}^{n} c_k s^{k-j-1} \qquad (s \in \mathbf{C}, j = 0, ..., n-1)$$

jelöléssel

$$\frac{e^z - 1}{zP(e^z)} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{k=j+1}^{n} c_k e^{(k-j-1)z} = \frac{e^z - 1}{z} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \frac{P_j(e^z)}{P(e^z)}.$$

Parciális törtekre bontással alkalmas $d_{jm} \in \mathbf{C}$ $(j+1, m = 1, ..., n)$ együtthatókkal

$$\frac{P_j(s)}{P(s)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{d_{jm}}{s-\xi_m} \qquad (s \in \mathbf{C} \setminus \{\xi_1, ..., \xi_n\}),$$

azaz

$$\frac{e^z-1}{zP(e^z)} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{k=j+1}^{n} c_k e^{(k-j-1)z} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{n} d_{jm} \frac{e^z-1}{z(e^z-\xi_m)}.$$

Lássuk be, hogy ha $0 \neq \alpha \in \mathbf{C}$ és $h_\alpha(t) := \alpha^{[t]} \quad (t \geq 0)$, akkor

$$Lh_\alpha(z) = \frac{e^z-1}{z(e^z-\alpha)} \qquad (0 \neq z \in \mathbf{C}, |\alpha| < e^{\mathrm{Re}\, z}).$$

Valóban, mivel $|\alpha e^{-z}| = |\alpha| e^{-\mathrm{Re}\, z} < 1$, ezért

$$Lh_\alpha(z) = \int_0^{+\infty} \alpha^{[t]} e^{-tz} dt = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \int_j^{j+1} e^{-tz} dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{z} \left(e^{-jz} - e^{(-j-1)z} \right) =$$

$$\frac{1-e^{-z}}{z} \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha e^{-z})^j = \frac{1-e^{-z}}{z(1-\alpha e^{-z})} = \frac{e^z-1}{z(e^z-\alpha)}.$$

Ha tehát

$$y_2 := \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{n} d_{jm} h_{\xi_m},$$

akkor $0 \neq z \in \mathbf{C}, |\xi_m| < e^{\mathrm{Re}\, z} \ \ (m = 1, ..., n)$ esetén

$$\sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{n} d_{jm} \frac{e^z-1}{z(e^z-\xi_m)} = Ly_2(z).$$

(A fentiekben $\xi_m \neq 0 \ \ (m = 1, ..., n)$ nyilván feltehető, ti. $P(0) = c_0 \neq 0$.)

Összefoglalva mindezt a (8.2.2) differenciaegyenlet

$$x_\nu = y_1(\nu) + y_2(\nu) =$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} b_{\nu-k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j^{k-1}}{P'(\xi_j)} + \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{n} d_{jm}\xi_m^{\nu} =$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} b_{\nu-k} Q^{(k-1)}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{n} d_{jm}\xi_m^{\nu} \qquad (n \le \nu \in \mathbf{N})$$

megoldását kapjuk.

6° Az előbbiekben említett $d_{jm} \quad (j+1, m = 1, ..., n)$ paramétereket a 8.1.1. i) megjegyzésben látottakkal analóg módon az alábbiak szerint tudjuk kiszámítani:

$$d_{jm} = \frac{P_j(\xi_m)}{P'(\xi_m)} \qquad (j+1, m = 1, ..., n).$$

Hangsúlyozzuk, hogy mindez akkor érvényes, ha a P karakterisztikus polinom $\xi_1, ..., \xi_n$ gyökei páronként különbözők. Ha vannak köztük többszörös gyökök is, akkor ez az y_1 függvény alakját nem befolyásolja, hacsak az abban szerelő Q függvény eleget tesz az $LQ = 1/P$ összefüggésnek (ld. 2^o). A $P_j/P \quad (j = 1, ..., n)$ racionális törtfüggvények parciális törtekre bontásában pedig annyi a változás, hogy a P polinom $\mathbf{N} \ni \mu \ge 2$ multiplicitású ξ gyöke nem csupán egy $d/(z-\xi)$ alakú parciális törtet generál, hanem a $d_i/(z-\xi)^i \quad (i = 0, ..., \mu-1)$ törteket (alkalmas $d_0, ..., d_{\mu-1} \in \mathbf{C}$ együtthatókkal). Ezért a

$$z \mapsto \frac{e^z - 1}{z(e^z - \alpha)^i}$$

alakú függvényeket kell *Laplace*-transzformáltként előállítani. Legyen ehhez $0 \ne \alpha \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, ...$ és

$$h_{i,\alpha}(t) := \frac{\prod_{k=0}^{i-2}([t]-k)}{(i-1)!}\alpha^{[t]-i+1} \qquad (t \ge 0).$$

Ekkor $h_{1,\alpha} = h_\alpha$, ill. $i = 2, 3, ...$ mellett

$$Lh_{i,\alpha}(z) = \frac{e^z - 1}{z(e^z - \alpha)^i} \qquad (0 \ne z \in \mathbf{C}, |\alpha| < e^{\operatorname{Re} z}).$$

Ugyanis $h_{i,\alpha}(t) = 0 \quad (0 \le t < i-1)$, így

$$Lh_{i,\alpha}(z) = \frac{1}{(i-1)!} \int_{i-1}^{+\infty} \prod_{k=0}^{i-2}([t]-k)\alpha^{[t]-i+1}e^{-tz}dt =$$

$$\frac{1}{(i-1)!}\sum_{j=i-1}^{\infty}\prod_{k=0}^{i-2}(j-k)\alpha^{j-i+1}\int_j^{j+1}e^{-tz}dt=$$

$$\frac{1}{z(i-1)!}\sum_{j=i-1}^{\infty}\prod_{k=0}^{i-2}(j-k)\alpha^{j-i+1}\left(e^{-jz}-e^{(-j-1)z}\right)=$$

$$\frac{1-e^{-z}}{z(i-1)!}\sum_{j=i-1}^{\infty}\prod_{k=0}^{i-2}(j-k)\alpha^{j-i+1}e^{-jz}=$$

$$\frac{e^z-1}{ze^{iz}(i-1)!}\sum_{j=i-1}^{\infty}\prod_{k=0}^{i-2}(j-k)(\alpha e^{-z})^{j-i+1}=$$

$$\frac{e^z-1}{ze^{iz}(i-1)!}F^{(i-1)}(\alpha e^{-z}),$$

ahol $F(s):=\sum_{k=0}^{\infty}s^k=1/(1-s)\ \ (s\in\mathbf{C},|s|<1)$. Tehát

$$F^{(i-1)}(\alpha e^{-z})=\frac{(i-1)!}{(1-\alpha e^{-z})^i},$$

amiből a mondott formula már következik.

7° Tegyük fel tehát valamilyen $p=1,...,n$ esetén, hogy a P polinom páronként különböző gyökei: $\xi_1,...,\xi_p$, rendre a $\mu_1,...,\mu_p\,(\geq 1)$ multiplicitással (ahol tehát $\sum_{m=1}^{p}\mu_m=n$). Ekkor az 5^o-beli $P_j/P\quad(j=0,...,n-1)$ hányadosokra a következőt kapjuk:

$$\frac{P_j(s)}{P(s)}=\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{\mu_m}\frac{d_{jm}^{(i)}}{(s-\xi_m)^i}\qquad(s\in\mathbf{C}\setminus\{\xi_1,...,\xi_n\})$$

(alkalmas $d_{jm}^{(i)}\in\mathbf{C}$ együtthatókkal). Ezért

$$\frac{e^z-1}{zP(e^z)}\sum_{j=0}^{n-1}x_j\sum_{k=j+1}^{n}c_ke^{(k-j-1)z}=\sum_{j=0}^{n-1}x_j\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{\mu_m}d_{jm}^{(i)}\frac{e^z-1}{z(e^z-\xi_m)^i}.$$

Következésképpen

$$y_2 := \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} d_{jm}^{(i)} h_{i,\xi_m}.$$

Ennek megfelelően $\nu = n, n+1, ...$ esetén

$$x_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} b_{\nu-k} Q^{(k-1)}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{\mu_m} \frac{d_{jm}^{(i)} \prod_{k=0}^{i-2}(\nu-k)}{(i-1)!} \xi_m^{\nu-i+1}.$$

8° A legegyszerűbb esetben, amikor is $n = 1$, a (8.2.2) egyenlet a következő alakú:

$$c_0 x_\nu + c_1 x_{\nu+1} = b_\nu \qquad (\nu \in \mathbf{N}).$$

A P karakterisztikus polinom:

$$P(s) = c_0 + c_1 s \qquad (s \in \mathbf{C}),$$

azaz az egyetlen gyök: $\xi := -c_0/c_1$. Ezért $P'(\xi) = c_1$ és $P_0 \equiv c_1$, így (ld. 5^o, ill. 6^o) a megoldás:

$$x_\nu = \frac{1}{c_1} \cdot \sum_{k=1}^{\nu} b_{\nu-k} \xi^{k-1} + x_0 \cdot \xi^\nu \qquad (1 \leq \nu \in \mathbf{N})$$

(amiről közvetlen behelyettesítéssel is meggyőződhetünk).

9° Szemléltessük a fentieket a (gyakorlat szempontjából is fontos) másodrendű esetben is: $n = 2$, ill.

$$c_0 x_\nu + c_1 x_{\nu+1} + c_2 x_{\nu+2} = b_\nu \qquad (\nu \in \mathbf{N}).$$

Tehát

$$P(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 = c_2 (s - \xi_1)(s - \xi_2),$$

$$P_0(s) = c_1 + c_2 s\ ,\ P_1(s) = c_2 \qquad (s \in \mathbf{C}),$$

ahol először a ξ_1, ξ_2 gyökökről tegyük fel, hogy különbözők: $\xi_1 \neq \xi_2$. Ekkor $2 \leq \nu \in \mathbf{N}$ esetén

$$x_\nu=\sum_{k=1}^{\nu} b_{\nu-k}\left(\frac{\xi_1^{k-1}}{P'(\xi_1)}+\frac{\xi_2^{k-1}}{P'(\xi_2)}\right)+x_0\left(d_{01}\xi_1^\nu+d_{02}\xi_2^\nu\right)+x_1\left(d_{11}\xi_1^\nu+d_{12}\xi_2^\nu\right).$$

A klasszikus *Fibonacci*-sorozat esetén

$$c_0:=c_1:=1\ ,\ c_2:=-1\ ,x_0:=0\ ,\ x_1:=1\ ,\ b_\nu:=0 \qquad (\nu\in\mathbf{N}),$$

azaz

$$P(s)=1+s-s^2\ ,\ P_0(s)=1-s\ ,\ P_1(s)=-1 \qquad (s\in\mathbf{C}),$$

ezért

$$\xi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ \xi_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ,\ d_{11}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ d_{12}=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Más szóval a jól ismert „képlet” adódik:

$$x_\nu=d_{11}\xi_1^\nu+d_{12}\xi_2^\nu=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\nu-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^\nu=$$

$$\frac{(1+\sqrt{5})^\nu-(1-\sqrt{5})^\nu}{\sqrt{5}\cdot 2^\nu} \qquad (2\le\nu\in\mathbf{N}).$$

Ha $\xi_1=\xi_2=:\xi$, azaz $P(s)=c_2(s-\xi)^2$ $(s\in\mathbf{C})$, akkor (ld. xi))

$$x_\nu=\sum_{k=1}^{\nu} Q^{(k-1)}(0)+\sum_{j=0}^{1} x_j\left(d_{j1}^{(1)}\xi^\nu+d_{j1}^{(2)}\nu\xi^{\nu-1}\right) \qquad (2\le\nu\in\mathbf{N}).$$

Itt

$$Q(0)=c_{11}\ ,\ Q^{(k-1)}(0)=\sum_{i=1}^{2} c_{i1}\binom{k-1}{i-1}\xi^{k-i} \qquad (k=2,3,...),$$

ahol

$$\frac{1}{P(s)} = \frac{c_{11}}{s-\xi} + \frac{c_{21}}{(s-\xi)^2} \qquad (s \in \mathbf{C} \setminus \{\xi\})$$

és

$$\frac{P_0(s)}{P(s)} = \frac{c_1 + c_2 s}{c_2(s-\xi)^2} = \frac{d_{01}^{(1)}}{s-\xi} + \frac{d_{01}^{(2)}}{(s-\xi)^2},$$

$$\frac{P_1(s)}{P(s)} = \frac{1}{(s-\xi)^2} = \frac{d_{11}^{(1)}}{s-\xi} + \frac{d_{11}^{(2)}}{(s-\xi)^2} \qquad (s \in \mathbf{C} \setminus \{\xi\}).$$

Tehát $d_{11}^{(1)} = 0, d_{11}^{(2)} = 1$ és $d_{01}^{(1)} = 1, d_{01}^{(2)} = \xi + c_1/c_2$, ill. $c_{11} = 0$, $c_{21} = 1/c_2$. Ezért

$$x_\nu = \frac{1}{c_2} \sum_{k=1}^{\nu} (k-1) b_{\nu-k} \xi^{k-2} + x_0(\xi^\nu + (\xi + c_1/c_2)\nu\xi^{\nu-1}) + x_1 \nu \xi^{\nu-1} =$$

$$\frac{1}{c_2} \sum_{k=1}^{\nu} (k-1) b_{\nu-k} \xi^{k-2} + x_0(1+\nu)\xi^\nu + \left(\frac{x_0 c_1}{c_2} + x_1\right) \nu \xi^{\nu-1} \qquad (2 \le \nu \in \mathbf{N}).$$

Ha pl. adott $x_0, x_1 \in \mathbf{C}$ mellett

$$x_\nu - 2x_{\nu+1} + x_{\nu+2} = 0 \qquad (\nu \in \mathbf{N}),$$

akkor $P(s) = (s-1)^2 \quad (s \in \mathbf{C})$, azaz $c_0 = c_2 = \xi = 1$, $c_1 = -2$ és $b_\nu = 0 \quad (\nu \in \mathbf{N})$. A fentiek alapján így

$$x_\nu = x_0 + \nu(x_1 - x_0) \qquad (\nu \in \mathbf{N})$$

(amiről közvetlen behelyettesítéssel is meggyőződhetünk).

8.3. Általános kezdetiérték-problémák.

Tekintsük most a 8.1. feladat alábbi általánosítását:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = f(t) \qquad (t \ge 0), \\ y^{(k)}(0) = y_k \qquad (k = 0, 1, ..., n-1), \end{cases}$$

ahol adottak az $y_0, ..., y_{n-1} \in \mathbf{R}$ számok. Ez utóbbi feladat két feladatra bontható a következő értelemben: ha Ψ és Θ egy-egy megoldása a

$$(8.3.1) \qquad \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k \Psi^{(k)}(t) = f(t) \qquad (t \geq 0), \\ \\ \Psi^{(k)}(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, ..., n-1), \end{cases}$$

ill. a

$$(8.3.2) \qquad \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k \Theta^{(k)}(t) = 0 \qquad (t \geq 0), \\ \\ \Theta^{(k)}(0) = y_k \qquad (k = 0, 1, ..., n-1) \end{cases}$$

feladatnak, akkor $y := \Psi + \Theta$ nyilván megoldja a mostani kiindulási feladatot.

A (8.3.1) feladatot már vizsgáltuk, a (8.3.2) megoldásához elegendő egy $\Theta_0, ..., \Theta_{n-1}$ *alaprendszer*t meghatározni (tehát a (8.3.2) feladat n darab lineárisan független megoldását). Ilyen pl. a

$$\Theta_k^{(j)}(0) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 \quad (k = j) \\ \\ 0 \quad (k \neq j) \end{cases} \qquad (k, j = 0, ..., n-1)$$

kezdeti feltételeknek eleget tevő $\Theta_0, ..., \Theta_{n-1}$ rendszer. Ekkor $\Theta = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Theta_k$.

Feltételezve, hogy $\Theta_k^{(n)} \in \mathcal{D}_L$, $L\Theta_k = \eta_k \quad (k = 0, ..., n-1)$, a következőt kapjuk (ld. 4.4. Tétel):

$$0 = \sum_{j=0}^{n} a_j L\Theta_k^{(j)}(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j \left(z^j \eta_k(z) - \sum_{l=0}^{j-1} \delta_{kl} z^{j-l-1} \right) =$$

$$(8.3.3) \quad \eta_k(z) \sum_{j=0}^{n} a_j z^j - \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{l=0}^{j-1} \delta_{kl} z^{j-l-1} = \eta_k(z) P(z) - P_k(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > q),$$

ahol $P_k(\xi) := \sum_{j=k+1}^{n} a_j \xi^{j-k-1} \quad (\xi \in \mathbf{C})$. Innen η_k, ill. (pl. *Mellin*-transzformációval) Θ_k $(k = 0, ..., n-1)$ meghatározható:

$$\Theta_k(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} e^{tz} \frac{P_k(z)}{P(z)}\, dz \qquad (t \geq 0),$$

ahol (a P polinom gyökeit $\xi_1, ..., \xi_n$-nel jelölve) $x > \operatorname{Re} \xi_k \quad (k = 1, ..., n)$. Világos, hogy $t > 0$ esetén a $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z < x\}$ félsíkon az $\dfrac{\exp^t P_k}{P}$ függvényre alkalmazható a 7.1. Tétel, azaz a $k = 0, ..., n-1$ indexekre

$$\Theta_k(t) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{\xi_j} \left(\frac{\exp^t P_k}{P} \right) \qquad (t \geq 0).$$

Ha pl. minden $\xi_j \; (j = 1, ..., n)$ gyök egyszeres, akkor

$$\operatorname{Res}_{\xi_j} \left(\frac{\exp^t P_k}{P} \right) = \frac{e^{tz} P_k(z)}{a_0 \prod_{j \neq l=1}^{n} (z - \xi_l)} \Bigg|_{z=\xi_j} = \frac{e^{t\xi_j} P_k(\xi_j)}{a_0 \prod_{j \neq l=1}^{n} (\xi_j - \xi_l)} \qquad (j = 1, ..., n),$$

azaz

$$\Theta_k(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_k(\xi_j)}{a_0 \prod_{j \neq l=1}^{n} (\xi_j - \xi_l)} e^{t\xi_j} \qquad (t > 0, k = 0, ..., n-1).$$

Ha ξ_j-k között többszörös gyökök is vannak, akkor legyenek a páronként különböző gyökök $\sigma_1, ..., \sigma_s$, a megfelelő multiplicitások pedig $\nu_1, ..., \nu_s$ (ahol $s \in \mathbf{N}$ és $\sum_{k=1}^{s} \nu_k = n$). Ekkor $j = 1, ..., s$ esetén

$$\frac{e^{tz} P_k(z)}{P(z)} = \frac{e^{tz} P_k(z)/Q_j(z)}{(z - \sigma_j)^{\nu_j}} \qquad (z \in \mathbf{C} \setminus \{\sigma_1, ..., \sigma_s\}),$$

ahol $P(\xi) =: (\xi - \sigma_j)^{\nu_j} Q_j(\xi) \quad (\xi \in \mathbf{C})$. Ezért

$$\operatorname{Res}_{\sigma_j} \left(\frac{\exp^t P_k}{P} \right) = \left(\frac{\exp^t P_k}{Q_j} \right)^{(\nu_j - 1)} (\sigma_j) \frac{1}{(\nu_j - 1)!} =$$

$$\sum_{l=0}^{\nu_j - 1} \frac{1}{l!(\nu_j - 1 - l)!} \left(\frac{P_k}{Q_j} \right)^{(\nu_j - 1 - l)} (\sigma_j) t^l e^{t\sigma_j},$$

így $k = 0, ..., n-1$ esetén

$$\Theta_k(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=0}^{\nu_j - 1} \left(\frac{P_k}{Q_j} \right)^{(\nu_j - 1 - l)} (\sigma_j) \frac{t^l}{l!(\nu_j - 1 - l)!} e^{t\sigma_j} \qquad (t \geq 0).$$

Legyen pl. a feladat a következő kezdetiérték-probléma megoldása:

$$\begin{cases} y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 1. \end{cases}$$

Ez a (8.3.2) feladat egy speciális esete, amikor is (az ottani jelölésekkel)

$$P(z) = z^4 + 2z^2 + 1 \ , \ P_3(z) = 1 \ \ (z \in \mathbf{C}) \ , \ \eta_3 = \frac{P_3}{P}$$

és $y = \Theta_3$. Tehát

$$\eta_3(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1} = \frac{1}{(1 + z^2)^2} = \frac{1}{(z + \imath)^2 (z - \imath)^2}.$$

Ezért (ld. *Mellin*-transzformáció) bármely $x > 0$ mellett

$$y(t) = \Theta_3(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{x-\imath\infty}^{x+\imath\infty} \frac{e^{tz}}{(z + \imath)^2 (z - \imath)^2} \, dz \qquad (t \geq 0).$$

Ha $t \geq 0, b > 0$ és φ_b a (7.1)-ban definiált utat jelenti, akkor

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_b} \frac{e^{tz}}{(z + \imath)^2 (z - \imath)^2} \, dz = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_b} \eta_3 \exp^t =$$

$$\mathrm{Res}_{\imath}(\eta_3 \exp^t) + \mathrm{Res}_{-\imath}(\eta_3 \exp^t) = \alpha_1 + \beta_1,$$

ahol

$$\frac{e^{tz}}{(z + \imath)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - \imath)^k \quad , \quad \frac{e^{tz}}{(z - \imath)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (z - \imath)^k.$$

Következésképpen

$$\alpha_1 = \left(\left(\frac{e^{tz}}{(z + \imath)^2} \right)' \right)_{z=\imath} = \left(\frac{te^{tz}(z + \imath)^2 - e^{tz} 2(z + \imath)}{(z + \imath)^4} \right)_{z=\imath} = \frac{te^{\imath t}(-4) - e^{\imath t} 4\imath}{16},$$

$$\beta_1 = \left(\left(\frac{e^{tz}}{(z-\imath)^2} \right)' \right)_{z=-\imath} = \left(\frac{te^{tz}(z-\imath)^2 - e^{tz}2(z-\imath)}{(z-\imath)^4} \right)_{z=-\imath} = \frac{te^{-\imath t}(-4) + e^{-\imath t}4\imath}{16}.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\varphi_b} \frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2}\, dz = \frac{\sin t - t\cos t}{2} \qquad (t \geq 0).$$

Mivel (ld. a (7.1)-ban szereplő φ_b út felbontását) $\lim_{b\to+\infty} \int_{k_b} \frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2}\, dz = 0$, ezért

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \lim_{b\to+\infty} \int_{\varphi_b} \frac{e^{tz}}{(z+\imath)^2(z-\imath)^2}\, dz = \frac{\sin t - t\cos t}{2} \qquad (t \geq 0).$$

8.3.1. Megjegyzések.

i) Ha az előző feladatban az $y = \Theta_3$ megoldást közvetlen reziduum-számítással határozzuk meg (ld. 8.3.), akkor - figyelembe véve, hogy a $P(\xi) = (\xi-\imath)^2(\xi+\imath)^2$ $(\xi \in \mathbf{C})$ karakterisztikus polinomnak két darab kétszeres gyöke van ($\sigma_1 := \imath$, $\sigma_2 := -\imath$) - a következőt mondhatjuk:

$$y(t) = \Theta_3(t) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{l=0}^{1} \left(\frac{1}{Q_j} \right)^{(1-l)} (\sigma_j) t^l e^{t\sigma_j} \qquad (t \geq 0),$$

ahol $Q_1(\xi) = (\xi+\imath)^2, Q_2(\xi) = (\xi-\imath)^2 \quad (\xi \in \mathbf{C})$. Tehát

$$y(t) = \left(\left(\frac{1}{Q_1} \right)' (\imath) \frac{t}{Q_1(\imath)} \right) e^{\imath t} + \left(\left(\frac{1}{Q_2} \right)' (-\imath) \frac{t}{Q_2(-\imath)} \right) e^{-\imath t} =$$

$$\left(-2(2\imath)^{-3} - \frac{t}{4} \right) e^{\imath t} + \left(2(2\imath)^{-3} - \frac{t}{4} \right) e^{-\imath t} =$$

$$\frac{-\imath - t}{4} e^{\imath t} + \frac{\imath - t}{4} e^{-\imath t} = \frac{-t\cos t + \sin t}{2} \qquad (t \geq 0).$$

ii) (8.3.3) szerint $P(z)\eta_{n-1}(z) = P_{n-1}(z) = a_n$, (8.1.1) miatt pedig $L\Psi(z)P(z) = Lf(z)$ $(z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > q)$, ezért a konvolúció és a *Laplace*-transzformált kapcsolata (ld. 5. fejezet) alapján

$$L\Psi(z) = \frac{\eta_{n-1}(z)}{a_n} Lf(z) = \frac{1}{a_n} L\Theta_{n-1}(z) Lf(z) =$$

$$\frac{1}{a_n} L(\Theta_{n-1} * f)(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > q).$$

Ha tehát Ψ-t a *Mellin*-transzformációval számíthatjuk ki, akkor $\Psi = \frac{1}{a_n}\Theta_{n-1} * f$.

iii) Tekintsük pl. az

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin\, t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

kezdetiérték-problémát. Az előbbi megjegyzés szerint most $\Theta_1(0) = 0$, $\Theta'(0) = 1$. Továbbá

$$\eta_1(z) = \frac{1}{1+z^2} = L\sin(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re} z > 0),$$

azaz $\Theta_1 = \sin$. Következésképpen $y = \sin * \sin$, azaz

$$y(x) = \int_0^x \sin\, t \sin(x-t)\, dt = \frac{\sin\, t - t\cos t}{2} \qquad (t \geq 0).$$

8.4. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek.

8.4.1. Oldjuk meg az

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 4(\cos(2t) - \sin(2t) - t(8\cos(2t) + \sin(2t)) \\ y(0) = 1, y'(0) = 3 \end{cases}$$

kezdetiérték-problémát. Legyen $f_1(t) := \sin(2t)$, $f_2(t) := \cos(2t)$, $f_3(t) := t\sin(2t)$, $f_4(t) := t\cos(2t)$ $(t \geq 0)$. Ekkor

$$Lf_1(z) = \frac{2}{z^2+4}\ ,\ Lf_2(z) = \frac{z}{z^2+4},$$

$$Lf_3(z) = \frac{4z}{(z^2+4)^2}\ ,\ Lf_4(z) = \frac{z^2-4}{(z^2+4)^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0).$$

Ezért

$$(z^2-4z+3)Ly(z) = 4\frac{z-2}{z^2+4} - \frac{8z^2+4z-32}{(z^2+4)^2} + z - 1,$$

azaz

$$Ly(z) = \frac{4z}{(z^2+4)^2} + \frac{1}{z-3} = (Lf_3 + L\exp^3)(z) \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 3),$$

amiből $y(t) = f_3(t) + \exp^3(t) = t\sin(2t) + e^{3t}$ következik, ahol - könnyen beláthatóan - $t \in \mathbf{R}$ tetszőleges lehet.

8.4.2. Hasonlóan oldható meg az

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t}(\cos\, t + 2\sin\, t) \\ \\ y(0) = -1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

kezdetiérték-probléma. A 3.6. példa szerint (azt az $\omega := 1$ esetre alkalmazva), ill. a 4.1. Tétel ii) pontja alapján

$$L\left(\exp^{-2}(\cos + 2\sin)\right)(z) =$$

$$\frac{z+2}{(z+2)^2+1} + \frac{2}{(z+2)^2+1} = \frac{z+4}{(z+2)^2+1} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > -2).$$

Innen a 4.4.. Tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$L(y'' + 4y' + 4y) = (z^2+4z+4)Ly(z) + z - 3 =$$

$$\frac{z+4}{(z+2)^2+1} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > -2),$$

azaz

$$Ly(z) = -\frac{z^3 + 7z^2 + 16z + 11}{((z+2)^2+1)(z+2)^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > -2).$$

Az előbbi egyenlet jobb oldalát parciális törtekre bontva (a részletszámítást itt mellőzve) jutunk az

$$Ly(z) = -\frac{z+4}{(z+2)^2+1} + \frac{1}{(z+2)^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > -2)$$

egyenlőséghez. A fentiek, ill. a 4.2. iv) megjegyzés alapján tehát a $h(t) := t \quad (t \geq 0)$ jelöléssel

$$Ly(z) = L(-\exp^{-2}(\cos + 2\sin)) + L(\exp^{-2} h) = L(\exp^{-2}(h - \cos - 2\sin)).$$

Innen (könnyen ellenőrizhetően) kapjuk az

$$y(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

megoldást.

8.5. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek.

Alkalmazzuk most a *Laplace*-transzformációt az

$$y_1'(t) = 3y_1(t) - 2y_2(t) + e^{-t}$$
$$y_2'(t) = 2y_1(t) - y_2(t) + e^{3t}$$
$$y_1(0) = y_2(0) = 0$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszer (ill. kezdetiérték-probléma) megoldására. Legyen $f(t) := e^{-t}$, $g(t) := e^{3t} \quad (t \geq 0)$, ekkor (ld. 3.1., ill. 4.1. Tétel ii))

$$Lf(z) = \frac{1}{z+1} \ ,\ \ Lg(z) = \frac{1}{z-3} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 3).$$

Továbbá a 4.4. Tétel alapján (alkalmas $q \in \mathbf{R}$ mellett a $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, z > q$ helyeken)

$$zLy_1(z) = 3Ly_1(z) - 2y_2(z) + \frac{1}{z+1}$$

$$zLy_2(z) = 2Ly_1(z) - Ly_2(z) + \frac{1}{z-3},$$

amiből az Ly_1, Ly_2 *Laplace*-transzformáltakra (parciális törtekre bontással)

$$Ly_1(z) = \frac{z-5}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{2(z-1)} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{1}{2(z-3)},$$

$$Ly_2(z) = \frac{3+z}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{2(z-1)} + \frac{2}{(z-1)^2}$$

következik. Ha tehát $h(t) := te^t$, $s(t) := e^t$ $(t \geq 0)$, akkor (ld. 3.4.)

$$Ly_1(z) = \frac{1}{2}Ls(z) + 2Lh(z) - \frac{1}{2}Lg(z) \ , \ Ly_2(z) = \frac{1}{2}Lf(z) - \frac{1}{2}Ls(z) + 2Lh(z),$$

azaz

$$y_1(t) = \frac{1}{2}e^t + 2te^t - \frac{1}{2}e^{3t}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^t + 2te^t$$

(ahol egyszerű ellenőrzéssel $t \in \mathbf{R}$ tetszőleges lehet).

8.6. Integrálegyenletek.

Legyen $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty, K : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $a, \lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$. Olyan $f : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ függvényt keresünk, amelyre minden $t \in (\alpha, \beta)$ esetén létezik az $\int_\alpha^\beta f(x)K(t,x)\,dx \in \mathbf{R}$ integrál és

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_\alpha^\beta f(x)K(t,x)\,dx \qquad (t \in (\alpha, \beta)).$$

Első-, ill. másodfajú lineáris *Fredholm*-típusú (integrál-)egyenletről beszélünk, ha $a = 0$, ill. $a \neq 0$. Ha $\varphi \equiv 0$, akkor az egyenletet homogénnek nevezzük.

Ha az f-re vonatkozó fenti egyenlőség helyett az

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_\alpha^t f(x)K(t,x)\,dx \qquad (t \in (\alpha,\beta))$$

egyenlőség fennállását írjuk elő, akkor az így kitűzött feladatot (az f függvény meghatározását) lineáris *Volterra*-típusú egyenletnek nevezzük.

Tegyük fel, hogy $\alpha = 0, D : (0,\beta) \to \mathbf{R}$ és az előbbi *Volterra*-egyenlet az alábbi alakú:

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^t f(x)D(t-x)\,dx \qquad (t \in (0,\beta)).$$

Ekkor tehát

$$af = \varphi + \lambda f * D$$

(konvolúciós egyenlet). Ha az itt megjelenő $f * D$-ről feltételezzük az 5.1. Tétel feltételeit, akkor $\varphi \in \mathcal{D}_L$ esetén

$$aLf = L\varphi + \lambda Lf \cdot LD,$$

azaz

$$Lf = \frac{L\varphi}{a - \lambda LD}$$

(feltéve, hogy LD nem állandó). Némi átalakítás után

$$Lf = \frac{L\varphi}{a} + \frac{\lambda}{a}\frac{LD}{a-\lambda LD}L\varphi.$$

Legyen $\Psi := \dfrac{LD}{a-\lambda LD}$ és tegyük fel, hogy alkalmas $\psi \in \mathcal{D}_L$ függvényre $L\psi = \Psi$ és $\psi * \varphi$-re alkalmazható az 5.1. Tétel. Ekkor

$$Lf = \frac{L\varphi}{a} + \frac{\lambda}{a}L\psi \cdot L\varphi,$$

azaz $f = \frac{\varphi}{a} + \frac{\lambda}{a} \cdot \psi * \varphi$.

Illusztrációképpen tekintsük az alábbi integrálegyenleteket.

a)

$$f(t) = t^2 + \int_0^t f(x)\,dx \qquad (t \geq 0)$$

(azaz $a := \lambda := 1, \varphi(t) := t^2 \quad (t \geq 0), D \equiv 1$). Ekkor (ld. 3.1. és 3.3.)

$$Lf(z) = \frac{2}{z^3} + Lf(z) \cdot \frac{1}{z} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0),$$

azaz

$$Lf(z) = \frac{2}{z^3} \cdot \frac{1}{1 - 1/z} = \frac{2}{(z-1)z^2} = \frac{2}{z-1} - \frac{2}{z} - \frac{2}{z^2} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 1).$$

Így (ld. még 4.2. iii) megjegyzés) $Lf = 2L\exp - 2Lh_0 - 2Lh_1$ (ahol $h_n(t) := t^n$ $(t \geq 0, n \in \mathbf{N})$). Következésképpen

$$f(t) = 2(e^t - t - 1) \qquad (t > 0)$$

amiről egyszerű behelyettesítéssel is meggyőződhetünk: $2\int_0^t (e^x - x - 1)\, dx = 2e^t - 2 - t^2 - 2t$, tehát

$$t^2 + \int_0^t f(x)\, dx = 2(e^t - t - 1) = f(t) \qquad (t > 0).$$

b) Legyen most a feladat a következő:

$$f(t) = \sin\, t + \frac{1}{2}\int_0^t f(x)(t-x)^2\, dx \qquad (t > 0),$$

amikor is $a := 1, \varphi(t) := \sin\, t, D(t) := t^2 \quad (t > 0),\ \lambda := 1/2$. Mivel (ld. 3.3., ill. 3.6.)

$$LD(z) = \frac{2}{z^3}\ ,\ L\varphi(z) = \frac{1}{z^2+1} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0),$$

ezért

$$Lf(z) = \frac{L\varphi(z)}{a - \lambda LD(z)} = \frac{1}{z^2+1} \cdot \frac{1}{1 - z^{-3}} = \frac{z^3}{(z^2+1)(z^3-1)} =$$

$$\frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)(z^2+z+1)} =$$

$$\frac{1}{6(z-1)} + \frac{z+1}{2(z^2+1)} - \frac{2z+1}{3(z^2+z+1)} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 1).$$

Tudjuk (ld. 3.6.), hogy $L\sin(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $L\cos(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$, $(z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0)$, ill. (ld. 4.2. iii) megjegyzés) $L\exp(z) = \dfrac{1}{z-1}$ $(z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 1)$. Továbbá

$$\frac{2z+1}{3(z^2+z+1)} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{2z/\sqrt{3}+1/\sqrt{3}}{(2z/\sqrt{3}+1/\sqrt{3})^2+1},$$

azaz (ld. 4.2. i) megjegyzés) a $C(t) := e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2)$ $(t \geq 0)$ jelöléssel

$$\frac{2z+1}{3(z^2+z+1)} = \frac{4\sqrt{3}}{9} LC(z).$$

Tehát

$$Lf = \frac{1}{6}L\exp + \frac{1}{2}(L\cos + L\sin) - \frac{4\sqrt{3}}{9}LC.$$

Innen az

$$f(t) = \frac{e^t}{6} + \frac{\cos t + \sin t}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{9}e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) \qquad (t \geq 0)$$

megoldás adódik.

c) Oldjuk meg a

$$\sin^2 t = \int_0^t f(x)\sin(t-x)\,dx \qquad (t > 0)$$

elsőfajú *Volterra*-egyenletet. Tehát $L\sin^2 = Lf \cdot L\sin$, ahol az elemi $2\sin^2 t = 1 - \cos(2t)$ $(t \in \mathbf{R})$ azonosság alapján (ld. még 4.2. i) megjegyzés)

$$L\sin^2(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2}\frac{z}{z^2+4} = \frac{2}{z(z^2+4)} \qquad (z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0).$$

Ezért

$$L\sin^2(z) = \frac{2}{z(z^2+1)} = Lf(z) \cdot L\sin(z) = Lf(z) \cdot \frac{1}{z^2+1},$$

azaz

$$Lf(z) = \frac{2(z^2+1)}{z(z^2+4)} = \frac{1}{2z} + \frac{3}{2}\frac{z}{z^2+4} = \frac{1}{2z} + \frac{3}{4}\frac{z/2}{(z/2)^2+1} = \frac{1}{2}Lh_0(z) + \frac{3}{2}L\cos(z).$$

Következésképpen a feladat megoldása:

$$f(t) = \frac{1+3\cos(2t)}{2} \qquad (t>0).$$

d) Tekintsük a következő integrálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned} f(t) &= t + \int_0^t g(x)\,dx \\ g(t) &= 1 - t^3 + \int_0^t h(x)\,dx \qquad (t>0). \\ h(t) &= 2t^2 + \int_0^t f(x)\,dx \end{aligned}$$

Ekkor (ld. 4.4. i) megjegyzés) az alábbi egyenletrendszer adódik az Lf, Lg, Lh *Laplace*-transzformáltakra:

$$Lf(z) = z^{-2} + z^{-1}Lg(z)$$

$$Lg(z) = z^{-1} - 6z^{-4} + z^{-1}Lh(z)\,,$$

$$Lh(z) = 4z^{-3} + z^{-1}Lf(z)$$

azaz

$$z^2Lf(z) - zLg(z) = 1$$

$$z^4Lg(z) - z^3Lh(z) = z^3 - 6\,.$$

$$z^2Lh(z) - z^3Lh(z) = -4$$

Innen

$$Lg(z) = \frac{1}{z}\;,\; Lf(z) = \frac{2}{z^2}\;,\; Lh(z)\frac{6}{z^3} \qquad (z\in\mathbf{C}, \operatorname{Re} z>0),$$

amiből $f(t) = 2t$, $g(t) = 1$, $h(t) = 3t^2$ $(t>0)$ következik.

8.6. Parciális differenciálegyenletek.

Adott $l > 0$ mellett legyenek az

$$A, B, C, D, E, F, G : [0, l] \times [0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

függvények folytonosak és keressünk olyan $u \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ kétszer differenciálható függvényt, amelyre tetszőleges $\xi := (x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty)$ mellett

$$A(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi) + 2B(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(\xi) + C(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi) + D(\xi)\frac{\partial u}{\partial x}(\xi) + E(\xi)\frac{\partial u}{\partial t}(\xi) + F(\xi)u(\xi) + G(\xi) = 0$$

teljesül (másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet). Számos gyakorlati probléma matematikai modellje vezet erre a feladatra, pl.

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi),$$

ahol $0 \neq a \in \mathbf{R}$ adott állandó (hullámegyenlet);

$$\text{b)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi) = \beta^2 \frac{\partial u}{\partial t}(\xi),$$

ahol $0 \neq \beta \in \mathbf{R}$ adott állandó (hővezetési egyenlet).

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $B \equiv G \equiv 0$, ill., hogy az A, C, D, E, F függvények valójában egyváltozós függvények (a második változójuktól nem függnek):

$$A, C, D, E, F : [0, l] \to \mathbf{R}.$$

Ekkor tehát az u függvény meghatározását illetően a következő alakú egyenletből indulhatunk ki:

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi) + C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi) + D(x)\frac{\partial u}{\partial x}(\xi) + E(x)\frac{\partial u}{\partial t}(\xi) + F(x)u(\xi) = 0.$$

A fenti matematikai modellt az alábbi kezdeti-, ill. peremfeltételekkel egészítjük ki:

$$\text{i)} \qquad u(x,0)=\varphi(x)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) \qquad (0\le x\le l),$$

$$\text{ii)} \qquad u(0,t)=f(t)\ ,\ \alpha\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)+\beta\frac{\partial u}{\partial t}(l,t)=\gamma u(l,t) \qquad (t\ge 0),$$

ahol $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$, $\varphi,\psi:[0,l]\to\mathbf{R}$, $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ pedig adott állandók, ill. folytonos függvények. Tételezzük fel, hogy bármely $x\in[0,l]$ esetén a

$$[0,+\infty)\ni t\mapsto\begin{cases} u(x,t)\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\\[2mm] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\\[2mm] \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\end{cases}$$

(egyváltozós) függvények $\mathcal{D}_L$-beliek és legyen

$$Lu(x,z):=\int_0^{+\infty}e^{-tz}u(x,t)\,dt\ ,\ L\frac{\partial u}{\partial x}(x,z):=\int_0^{+\infty}e^{-tz}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt,$$

$$L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,z):=\int_0^{+\infty}e^{-tz}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dt\ ,\ L\frac{\partial u}{\partial t}(x,z):=\int_0^{+\infty}e^{-tz}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dt,$$

$$L\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,z):=\int_0^{+\infty}e^{-tz}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,dt \qquad (z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,z>a)$$

valamilyen $a\in\mathbf{R}$ konstanssal. Feltesszük továbbá, hogy $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ kiszámításakor a $\frac{\partial}{\partial x}$, ill. a $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ deriválások és az $\int_0^{+\infty}\cdots$ integrálás sorrendje felcserélhető:

$$\int_0^{+\infty}e^{-tz}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{+\infty}e^{-tz}u(x,t)\,dt\right),$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-tz}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dt=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int_0^{+\infty}e^{-tz}u(x,t)\,dt\right).$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy

$$L\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(Lu)}{\partial x} \quad , \quad L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(Lu)}{\partial x^2}.$$

A deriváltak *Laplace*-transzformáltjairól szóló tételt (ld. 4.4. Tétel) alkalmazva

$$L\frac{\partial u}{\partial t}(x,z) = zLu(x,z) - u(x,0),$$

$$L\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,z) = z^2 Lu(x,z) - u(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \qquad (x \in [0,l], z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > a).$$

Mindezek alapján azt mondhatjuk, hogy a szóban forgó parciális differenciálegyenletünk „*Laplace*-transzformáltja" a következő:

$$A(x)\frac{\partial^2(Lu)}{\partial x^2}(x,z) + C(x)\left(z^2 Lu(x,z) - zu(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right) + D(x)\frac{\partial(Lu)}{\partial x}(x,z) +$$

$$E(x)\left(zLu(x,z) - u(x,0)\right) + F(x)Lu(x,z) = 0 \qquad (x \in [0,l], z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > a).$$

Figyelembe véve az i) kezdeti feltételeket is a keresett u függvény „*Laplace*-transzformáltját" illetően az alábbi egyenletre jutunk:

$$A(x)\frac{\partial^2(Lu)}{\partial x^2}(x,z) + D(x)\frac{\partial(Lu)}{\partial x}(x,z) + \big(C(x)z^2 + E(x)z + F(x)\big)\, Lu(x,z) =$$

$$C(x)z\varphi(x) + E(x)\varphi(x) + C(x)\psi(x) \qquad (x \in [0,l], z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > a).$$

Ez rögzített z mellett nem más, mint az $x \mapsto Lu(x,z)$ függvényre vonatkozó másodrendű közönséges lineáris differenciálegyenlet. Peremfeltételként a fenti ii) peremfeltételből azt kapjuk, hogy

$$Lu(0,z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} u(0,t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\, dt = Lf(z),$$

ill.

$$\alpha\frac{\partial(Lu)}{\partial x}(l,z) = \alpha L\frac{\partial u}{\partial x}(l,z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz}\alpha\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)\, dt =$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-tz}\left(\gamma u(l,t)-\beta\frac{\partial u}{\partial t}(l,t)\right)\,dt=$$

$$\gamma Lu(l,z)-\beta L\frac{\partial u}{\partial t}(l,t)=\gamma Lu(l,z)-\beta\left(zLu(l,z)-u(l,0)\right)=$$

$$\gamma Lu(l,z)-\beta zLu(l,z)+\beta\varphi(l),$$

azaz

$$\alpha\frac{\partial(Lu)}{\partial x}(l,z)+(\beta z-\gamma)Lu(l,z)-\beta\varphi(l)=0.$$

Ha a most kapott modellből kiszámítottuk az $x\mapsto Lu(x,z)$ függvényt, akkor - rögzített $x\in[0,l]$ mellett - pl. *Mellin*-transzformációval kapjuk az u megoldást.

1° Első példaként alkalmazzuk a most vázolt módszert a fent említett hullámegyenletre az

$$u(x,0)=q\sin\frac{n\pi x}{l}\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\quad(0\le x\le l)\quad,\quad u(0,t)=u(l,t)=0\quad(t\ge 0)$$

kezdeti-, ill. peremfeltételek mellett, ahol $0<n\in\mathbf{N}, q>0$. Most tehát

$$\varphi(x)=q\sin\frac{n\pi x}{l}\quad(0\le x\le l)\ ,\ \psi\equiv 0\ ,\ f\equiv 0,$$

ill.

$$A\equiv 1\ ,\ C\equiv -1/a^2\ ,\ D\equiv E\equiv F\equiv 0,$$

ezért az Lu transzformáltra vonatkozó másodrendű differenciálegyenlet a következő:

$$\frac{\partial^2(Lu)}{\partial x^2}(x,z)-\frac{z^2}{a^2}Lu(x,z)=-\frac{qz}{a^2}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

a peremfeltételek pedig: $Lu(0,z)=Lu(l,z)=0$.

A szóban forgó differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja: $P(y):=y^2-z^2/a^2$ $(y\in\mathbf{C})$, aminek két egyszeres gyöke van: z/a és $-z/a$. Ezért egy alaprendszere: $x\mapsto e^{xz/a}$, ill. $x\mapsto e^{-xz/a}$, így a homogén részének az általános megoldása:

$$x\mapsto c_1e^{xz/a}+c_2e^{-xz/a}\qquad(c_1,c_2\in\mathbf{R}).$$

Keressünk egy partikuláris megoldást $x \mapsto c_3 \sin \frac{n\pi x}{l}$ alakban alkalmas $\mathbf{R} \ni c_3$-mal. Ehhez szükséges és elégséges, hogy

$$-c_3 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \frac{c_3 z^2}{a^2} = -\frac{qz}{a^2}$$

legyen, azaz $c_3 = \dfrac{qz}{z^2 + (an\pi/l)^2}$. Az általános megoldásunk tehát Lu-ra a következő:

$$Lu(x,z) = c_1 e^{xz/a} + c_2 e^{-xz/a} + \frac{qz}{z^2 + (an\pi/l)^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (0 \le x \le l).$$

Az $Lu(0,z) = c_1 + c_2 = 0$, $Lu(l,z) = c_1 e^{lz/a} + c_2 e^{-lz/a} = 0$ peremfeltételekből $c_1 = c_2 = 0$ adódik, azaz

$$Lu(x,z) = \frac{qz}{z^2 + (an\pi/l)^2} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Innen (ld. 3.6.) azt kapjuk, hogy

$$u(x,t) = q \cos \frac{an\pi t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad ((x,t) \in [0,l] \times [0,+\infty)).$$

2° Oldjuk meg az előbbi módszerrel a bevezetőben említett hővezetési egyenletet az

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad (t \ge 0)\ ,\ u(x,0) = q \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (0 \le x \le l)$$

feltételek mellett (ahol q, n ugyanazok a paraméterek, mint az az előbbi példában). Tehát $A \equiv 1$, $C \equiv D \equiv F \equiv 0$, $E \equiv -\beta^2$, ezért az Lu-ra vonatkozó másodrendű differenciálegyenlet a következő:

$$\frac{\partial^2 (Lu)}{\partial x^2}(x,z) - \beta^2 z Lu(x,z) = -\beta^2 q \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Ennek a karakterisztikus polinomja: $P(y) := y^2 - \beta^2 \quad (y \in \mathbf{C})$, aminek a gyökei: $\pm\beta\sqrt{z}$. Így egy alaprendszer most: $x \mapsto e^{\beta x \sqrt{z}}$, $x \mapsto e^{-\beta x \sqrt{z}}$. Keressünk partikuláris megoldást most is $x \mapsto c_3 \sin \frac{n\pi x}{l}$ alakban, amikor is

$$-c_3 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} - \beta^2 z c_3 \sin \frac{n\pi x}{l} = -\beta^2 q \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Innen $c_3 = \dfrac{\beta^2 q}{\beta^2 z + (n\pi/l)^2}$, következésképpen az általános megoldás Lu-ra:

$$Lu(x,z) = c_1 e^{\beta x\sqrt{z}} + c_2 e^{-\beta x\sqrt{z}} + \frac{\beta^2 q}{\beta^2 z + (n\pi/l)^2} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

A kezdeti-, ill. peremfeltételek szerint

$$Lu(0,z) = c_1 + c_2 = 0\ ,\ Lu(l,z) = c_1 e^{\beta l\sqrt{z}} + c_2 e^{-\beta l\sqrt{z}} = 0,$$

amiből $c_1 = c_2 = 0$. Ezért

$$Lu(x,z) = \frac{q}{z + (n\pi/\beta l)^2} \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (0 \le x \le l),$$

amiből (ld. 4.2. iii) megjegyzés)

$$u(x,t) = q e^{-(n\pi/\beta l)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad ((x,t) \in [0,l] \times [0,+\infty)).$$

9. Irodalomjegyzék.

[1] **R. E. Bellman - R. S. Roth**, The Laplace Transform, World Scientific, Singapore, 1984.

[2] **B. Davis**, Integral Transforms and Their Applications, Springer Verlag, Series: Texts in Applied Mathematics, Vol. 41., 3rd edition, 2002 (magyar fordítás: Műszaki Könyvkiadó, 1983.)

[3] **G. Doetsch**, Introduction to the theory and application of the Laplace transformation, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.

[4] **P. P. G. Dyke**, An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series, Springer Verlag, Series: Undergraduate Mathematics, 2000.

[5] **G. B. Folland**, Fourier Analysis and Its Applications, Pure and Applied Undergraduate Texts 4, AMS, Providence, Rhode Island, 2009.

[6] **O. Föllinger**, Laplace- und Fourier-Transformation, Elitera, Berlin, 1977.

[7] **P. K. F. Kuhfittig**, Introduction to the Laplace Transform, Springer Series: Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, Vol. 8, 1978.

[8] **F. D. Murnaghan**, The Laplace Transform, Spartan Books, Washington, 1962.

[9] **J. L. Schiff**, The Laplace Transform. Theory and applications, Springer-Verlag, New York, 1999.

[10] **M. G. Smith**, Laplace Transform Theory, Princeton, 1966.

[11] **A. G. Sveshnikov - A. N. Tikhonov**, Theory of functions of a complex variable, Izdat. Nauka, Moscow, 1974.

[12] **D. V. Widder**, An Introduction to Transform Theory, Academic Press, 1971.