Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

Fourier–Jacobi-sorok konvergenciája

Doktori értekezés tézisei

Chripkó Ágnes

Témavezető: Szili László, egyetemi docens, CSc

Budapest, 2015

Doktori iskola:	ELTE Informatika Doktori Iskola
Az iskola vezetője:	Csuhaj Varjú Erzsébet, egyetemi tanár, DSc
Doktori program:	Numerikus és szimbolikus számítások
A program vezetője:	Weisz Ferenc, egyetemi tanár, DSc

Bevezetés

Az approximációelmélet fő kérdése, hogy hogyan tudunk függvényeket egyszerűbb szerkezetű függvények segítségével megközelíteni. Periodikus függvényeket a legtermészetesebb módon a trigonometrikus Fourier-soruk részletösszegeivel közelíthetünk. Ezek a részletösszegek azonban nem konvergálnak egyenletesen minden folytonos függvény esetén. Ez az állítás akkor is igaz marad, ha valamilyen ortogonális polinomrendszer szerinti Fourier-sort tekintünk.

Értekezésünk a Jacobi-polinomok szerinti Fourier-sorok, azaz a *Fourier–Jacobi-sorok* elméletének három problémájával foglalkozik.

A Fourier–Jacobi-sor részletösszegeiből kiindulva szummációval olyan eljárásokat konstruálhatunk, amelyek már egyenletesen konvergensek folytonos függvények alkalmasan megválasztott Banach-tereiben. Ezzel kapcsolatos eredményeinket az értekezés 3. fejezete tartalmazza.

A pontonkénti konvergencia vizsgálatában fontos szerepet játszanak a Lebesgue-függvények. A 4. fejezetben a Fourier–Jacobi-sor súlyozott Lebesgue-függvényére igazolunk pontonkénti alsó és felső becslést.

Fourier–Jacobi-sorok diszkrét változatait is tekinthetjük. A Jacobi-polinomok gyökein történő Lagrange-interpoláció konvergenciájával kapcsolatban a folytonos esethez hasonló kérdéseket vethetünk fel. Az 5. fejezetben az ún. Grünwald–Rogosinski-féle eljárásra közlünk új eredményeket.

A disszertáció eredményei a [2], [3], [4] publikációkban jelentek meg.

Fourier–Jacobi-sor szummációinak egyenletes konvergenciája

Legyen $\alpha, \beta > -1$, és jelölje $p_n^{(\alpha,\beta)}$ $(n \in \mathbb{N})$ a $(-1,1)$-en a

$$w^{(\alpha,\beta)}(x) := (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \qquad (x \in (-1,1))$$

Jacobi-súlyra nézve ortonormált rendszert alkotó Jacobi-polinomok sorozatát. Tegyük fel, hogy $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amelyre a

$$c_k^{(\alpha,\beta)}(f) := \int_{-1}^{1} f(x) p_k^{(\alpha,\beta)}(x) w^{(\alpha,\beta)}(x)\,\mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Fourier-együtthatók léteznek. Ekkor az f függvény *Fourier–Jacobi-során* az

$$S^{(\alpha,\beta)}(f,x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k^{(\alpha,\beta)}(f) p_k^{(\alpha,\beta)}(x) \qquad (x \in [-1,1])$$

függvénysort értjük.

$\gamma, \delta \geq 0$ paraméterek mellett definiáljuk a következő súlyozott függvénytereket: Ha $\gamma, \delta > 0$, akkor legyen

$$C^{(\gamma,\delta)} := C^{(\gamma,\delta)}(-1,1) := \left\{ f \in C(-1,1) \mid \lim_{|x|\to 1} (fw^{(\gamma,\delta)})(x) = 0 \right\},$$

ha $\gamma = 0$, $\delta > 0$ (illetve $\delta = 0$, $\gamma > 0$), akkor $C^{(\gamma,\delta)}$ azoknak a $(-1,1)$-en folytonos függvényeknek a halmazát jelöli, amelyekre

$$\lim_{x\to -1} (fw^{(\gamma,\delta)})(x) = 0 \qquad \left(\text{illetve } \lim_{x\to 1} (fw^{(\gamma,\delta)})(x) = 0 \right).$$

Végül a $\gamma = \delta = 0$ esetben (ekkor tehát $w^{(\gamma,\delta)} \equiv 1$) legyen $C^{(\gamma,\delta)} := C[-1,1]$. A függvények közötti szokásos műveletekkel $C^{(\gamma,\delta)}$ lineáris tér az $\mathbb{R}$ felett, ezen

$$\|f\|_{\infty,(\gamma,\delta)} := \|fw^{(\gamma,\delta)}\|_\infty := \sup_{|x|\leq 1} \left| (fw^{(\gamma,\delta)})(x) \right|$$

egy norma és $\mathbf{C}^{(\gamma,\delta)} := \left(C^{(\gamma,\delta)}, \|\cdot\|_{\infty,(\gamma,\delta)} \right)$ Banach-tér.

Tekintsünk egy

$$\Theta := \begin{pmatrix} \theta_{0,1} & & & \\ \theta_{0,2} & \theta_{1,2} & & \\ \theta_{0,3} & \theta_{1,3} & \theta_{2,3} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

szummációs mátrixot, ahol a $\theta_{k,n}$ elemek valós számok. Az $f \in C^{(\gamma,\delta)}$ függvény Fourier–Jacobi-sorának *n-edik Θ-közepén* az

$$S_n^{(\alpha,\beta),\Theta}(f,x) := \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k,n} c_k^{(\alpha,\beta)}(f) p_k^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$(x \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}^+)$$

legfeljebb $(n-1)$-edfokú algebrai polinomot értjük.

Fontos speciális eset az, amikor a szummációs mátrixot egy $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

szummációs függvénnyel adjuk meg az alábbi módon:

$$\theta_{k,n} := \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1,\ n \in \mathbb{N}^+).$$

Rögzített $\alpha, \beta > -1$ esetén fogunk olyan feltételeket adni a $\gamma, \delta \geq 0$ paraméterekre, illetve a Θ szummációs mátrixra (vagy a φ szummációs függvényre), amelyek mellett a

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n^{(\alpha,\beta),\Theta}(f)\|_{\infty,(\gamma,\delta)} = 0$$

reláció minden $f \in C^{(\gamma,\delta)}$ függvényre fennáll, vagyis az f függvény Fourier–Jacobi-sorának Θ-közepei egyenletesen tartanak f-hez.

Megjegyezzük, hogy ezek az eredmények analogonjai a diszkrét esetnek (amikor a Fourier-részletösszegek helyett Lagrange-interpolációs polinomokat tekintünk; l. [6], [7]).

1. tétel. *Legyen $\alpha, \beta > -1$ és $\gamma, \delta \geq 0$. Ekkor*

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|f - S_n^{(\alpha,\beta),\Theta}(f)\right\|_{\infty,(\gamma,\delta)} = 0$$

akkor és csak akkor teljesül minden $f \in C^{(\gamma,\delta)}$ esetén, ha Θ kielégíti az alábbi feltételeket:

$$\lim_{n\to+\infty} (1 - \theta_{k,n}) = 0 \text{ minden rögzített } k \in \mathbb{N} \text{ esetén} \tag{T1}$$

és

$$\begin{cases} \text{létezik } n\text{-től független } c > 0 \text{ úgy, hogy minden } n \in \mathbb{N}^+ \text{ esetén} \\ \sup\limits_{x\in[-1,1]} \displaystyle\int_{-1}^{1} \left|\sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k,n} p_k^{(\alpha,\beta)}(x) p_k^{(\alpha,\beta)}(y)\right| \frac{w^{(\gamma,\delta)}(x) w^{(\alpha,\beta)}(y)}{w^{(\gamma,\delta)}(y)}\, \mathrm{d}y \leq c. \end{cases} \tag{B}$$

A (B)-vel jelölt feltétel teljesülését nehéz ellenőrizni, ezért a következő tételekben egyszerűbb elégséges feltételeket fogunk megadni az egyenletes konvergenciára. Ehhez először definiáljunk néhány további feltételt a Θ mátrixra:

$$\theta_{n-1,n} = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}^+), \tag{T2}$$

$$\triangle^2 \theta_{k-1,n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1,\ n \in \mathbb{N}^+), \tag{T3}$$

$$\triangle^2\theta_{k-1,n}\ (k=1,2,\dots,n-1,\ n\in\mathbb{N}^+)\ \text{állandó előjelű}, \tag{$T4$}$$

$$\operatorname{sgn}\,\triangle^2\theta_{k-1,n}=\operatorname{sgn}\,\theta_{n-1,n}\ (k=1,2,\dots,n-1,\ n\in\mathbb{N}^+), \tag{$T5$}$$

ahol

$$\triangle^2\theta_{k,n}:=\triangle\theta_{k+1,n}-\triangle\theta_{k,n},\quad \triangle\theta_{k,n}:=\theta_{k+1,n}-\theta_{k,n}\quad (\theta_{n,n}:=0).$$

2. tétel. *Tegyük fel, hogy $\alpha,\beta\geq -1/2$ és $\gamma,\delta\geq 0$ kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:*

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}<\gamma<\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\quad \textit{és}\quad \frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}<\delta<\frac{\beta}{2}+\frac{3}{4}. \tag{1}$$

Ekkor

(a) ($T1$), ($T2$) *és* ($T3$)

vagy

(b) ($T1$), ($T2$) *és* ($T4$)

vagy

(c) ($T1$) *és* ($T5$)

fennállása esetén

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|f-S_n^{(\alpha,\beta),\Theta}(f)\right\|_{\infty,(\gamma,\delta)}=0 \tag{2}$$

teljesül minden $f\in C^{(\gamma,\delta)}$ függvényre.

3. tétel. *Tegyük fel, hogy $\alpha,\beta\geq -1/2$ és $\gamma,\delta\geq 0$ kielégítik az* (1) *feltételeket. Legyen φ:* $[0,1]\to\mathbb{R}$ *egy folytonos szummációs függvény, továbbá tegyük fel, hogy*

(a) φ *nemnegatív és konvex* $[0,1]$*-en*

vagy

(b) φ *konvex (konkáv)* $[0,1]$*-en, továbbá létezik olyan $\varepsilon>0$ és $c>0$, hogy*

$$|\varphi(x)|\leq c\,(1-x)\quad (x\in[1-\varepsilon,1]).$$

Ekkor (2) *teljesül minden $f\in C^{(\gamma,\delta)}$ függvényre.*

4. tétel. *Tegyük fel, hogy $\alpha,\beta\geq -1/2$ és $\gamma,\delta\geq 0$ kielégítik az* (1) *feltételeket. Ekkor a*

(a) (C,μ) *Cesàro* ($\mu\geq 1$)*,*

(b) (R,ν,μ) *Riesz* ($\nu,\mu\geq 1$)*,*

(c) *de la Vallée Poussin,*

(d) *Rogosinski*

összegzések egyenletesen konvergensek a $\mathbf{C}^{(\gamma,\delta)}$ *térben.*

A következő tételek a konvergencia nagyságrendjét vizsgálják. Ezzel kapcsolatban jelölje az $f \in C^{(\gamma,\delta)}$ legfeljebb n-edfokú polinomokkal való legjobb megközelítését

$$E_n^{(\gamma,\delta)}(f) := \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|f-P\|_{\infty,(\gamma,\delta)}.$$

Az alábbi eredményeink szerint a legjobb konvergenciarendet a de la Vallée Poussin-féle összegzéssel érhetjük el, általában pedig legalább Stechkin-típusú konvergenciarendet tudunk garantálni.

5. tétel. *Tegyük fel, hogy* $\alpha,\beta \geq -1/2$ *és* $\gamma,\delta \geq 0$ *kielégítik az* (1) *feltételeket. Ekkor minden* $s\in(0,1)$ *esetén*

$$\left\|f - S_n^{(\alpha,\beta),\varphi_s}(f)\right\|_{\infty,(\gamma,\delta)} \leq c\, E_{q_n}^{(\gamma,\delta)}(f) \quad (n\in\mathbb{N}^+),$$

ahol $f \in C^{(\gamma,\delta)}$, $c>0$ f*-től és* n*-től független konstans,* φ_s *a de la Vallée Poussin-féle szummációs függvény, továbbá* $q_n := [sn]$.

6. tétel. *Tegyük fel, hogy* $\alpha,\beta \geq -1/2$ *és* $\gamma,\delta \geq 0$ *kielégítik az* (1) *feltételeket. Ekkor minden* $f\in C^{(\gamma,\delta)}$ *és* $n\in\mathbb{N}^+$ *esetén*

$$\left\|f - \sigma_n^{(\alpha,\beta)}(f)\right\|_{\infty,(\gamma,\delta)} \leq \frac{c}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E_k^{(\gamma,\delta)}(f),$$

ahol $c>0$ *független* f*-től és* n*-től,* $\sigma_n^{(\alpha,\beta)}(f)$ *pedig a Fejér-közepeket jelöli.*

7. tétel. *Tegyük fel, hogy* $\alpha,\beta \geq -1/2$ *és* $\gamma,\delta \geq 0$ *kielégítik az* (1) *feltételeket, továbbá* $\theta_{0,n} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n\in\mathbb{N}^+)$. *Ekkor*

(a) $(T1)$, $(T2)$ *és* $(T3)$

vagy

(b) $(T1)$, $(T2)$, $(T4)$ *és* $1-\theta_{1,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n\in\mathbb{N}^+)$

fennállásakor

$$\left\|f - S_n^{(\alpha,\beta),\Theta}(f)\right\|_{\infty,(\gamma,\delta)} \leq \frac{c}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E_k^{(\gamma,\delta)}(f)$$

teljesül minden $f\in C^{(\gamma,\delta)}$ *és* $n\in\mathbb{N}^+$ *esetén, ahol* $c>0$ f*-től és* n*-től független konstans.*

Fourier–Jacobi-sor súlyozott Lebesgue-függvénye

Approximációs eljárások különböző típusú konvergenciájának vizsgálatánál alapvető szerepet játszanak a Lebesgue-függvények és Lebesgue-állandók. Fourier–Jacobi-sorok Lebesgue-függvényeinek pontonkénti aszimptotikus viselkedésére S. A. Agahanov és G. I. Natanson [1] igazoltak nagyságrend szempontjából végleges eredményt. Mi a súlyozott Lebesgue-függvényekre bizonyítottunk egy hasonló jellegű állítást.

Legyen $\alpha, \beta > -1$ és $\gamma, \delta \geq 0$. A

$$\lambda_n^{(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)}(x) := w^{(\gamma,\delta)}(x) \int_{-1}^{1} \left| K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) \right| w^{(\alpha-\gamma,\beta-\delta)}(y)\, \mathrm{d}y$$

$$(x \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N})$$

függvényt az (α, β) paraméterű Jacobi-polinomok szerinti *súlyozott Lebesgue-függvénynek* nevezzük, ahol

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(x,y) := \sum_{k=0}^{n} p_k^{(\alpha,\beta)}(x) p_k^{(\alpha,\beta)}(y) \qquad (x, y \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N})$$

a magfüggvény.

A tétel megfogalmazásában $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ a Szegő-féle normálással tekintett Jacobi-polinomokat jelöli.

8. tétel. *Tegyük fel, hogy az* $\alpha, \beta > -1/2$ *és* $\gamma, \delta \geq 0$ *paraméterekre*

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} < \gamma < \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4} \quad \text{és} \quad \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} < \delta < \frac{\beta}{2} + \frac{3}{4}. \tag{3}$$

Ekkor minden $x \in [-1,1]$ *és m. m.* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$c_1\, w^{(\gamma,\delta)}(x)\, \phi_n^{(\alpha,\beta)}(x) \leq \lambda_n^{(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)}(x) \leq c_2\, \widetilde{w}_n^{(\gamma,\delta)}(x)\, \phi_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

ahol

$$\phi_n^{(\alpha,\beta)}(x) := \log\left(n\sqrt{1-x^2}+1\right) +$$

$$+\sqrt{n}\left(\sqrt{1-x}+\tfrac{1}{n}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+x}+\tfrac{1}{n}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}\left(|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| + |P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)|\right),$$

$$\widetilde{w}_n^{(\gamma,\delta)}(x) := \left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+\frac{1}{n}}\right)^{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+\frac{1}{n}}\right)^{2\delta}$$

és c_1, c_2 x-től és n-től független pozitív állandók.

Vezessük most be $n \in \mathbb{N}$ esetén a

$$\Lambda_n^{(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)} := \max_{x\in[-1,1]} \lambda_n^{(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)}(x)$$

n-edik *súlyozott Lebesgue-állandót.* Ennek a nagyságrendjére vonatkozik az alábbi állítás.

9. tétel. *Tegyük fel, hogy $\alpha, \beta > -1/2$ és $\gamma, \delta \geq 0$ kielégítik a* (3) *feltételeket. Ekkor m. m. $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\Lambda_n^{(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)} \sim \log(n+1).$$

Diszkrét Fourier–Jacobi-sorok konvergenciája

Az interpolációs polinomok és a trigonometrikus Fourier-részletösszegek viselkedése között messzemenő hasonlóság van. Ezt támasztja alá például az interpolációelméletnek azon alapvető eredménye, hogy a $[-1,1]$ intervallumon vett tetszőleges alappontrendszerhez létezik olyan, a $[-1,1]$-en folytonos függvény, amelyre a Lagrange-interpolációs polinomok sorozata nem tart egyenletesen a függvényhez. A Fourier-sorokhoz hasonlóan tehát fontos kérdés az, hogy az interpolációs polinomokból kiindulva hogyan lehet konstruálni minden folytonos függvényre egyenletesen konvergens eljárást. Az elsőfajú Csebisev-polinomok gyökrendszerén Grünwald Géza [5] adott meg ilyen eljárást. M. S. Webster [8] igazolta, hogy a másodfajú Csebisev-gyökökön tekintett eljárásra az analóg állítás csak a $(-1,1)$ zárt részintervallumain érvényes.

A következőkben ismertetett eredményünk azt mutatja, hogy a Webster-féle eredményen súlyozott Lagrange-interpoláció alkalmazásával javítani lehet.

Legyen $w_\gamma(x) := w^{(\gamma,\gamma)}(x) = (1-x^2)^\gamma$ egy Jacobi-súlyfüggvény ($\gamma \geq 0$, $x \in [-1,1]$), illetve az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket:

$$C_{w_\gamma} := C^{(\gamma,\gamma)}, \qquad \|f\|_{w_\gamma} := \|f\|_{\infty,(\gamma,\gamma)} \ (f \in C_{w_\gamma}).$$

A konvergenciát a $\mathbf{C}_{\mathbf{w}_\gamma} := \Big(C_{w_\gamma}, \|\cdot\|_{w_\gamma}\Big)$ Banach-térben fogjuk vizsgálni.

Tekintsük a másodfajú Csebisev-polinomokat:

$$U_n(x) = \frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta}$$
$$(x = \cos\theta,\ x \in [-1,1],\ \theta \in [0,\pi],\ n \in \mathbb{N}).$$

Jelölje $U_n(x)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ gyökeit

$$x_{k,n} := \cos\theta_{k,n} := \cos\frac{k\pi}{n+1} \qquad (k = 1,2,\ldots,n). \tag{4}$$

Egy $f \in C_{w_\gamma}$ függvény (4) pontrendszeren vett *súlyozott Lagrange-interpolációs polinomjait* a következőképpen definiáljuk:

$$L_n(f,U,w_\gamma,x) := w_\gamma(x)\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})l_{k,n}(U,x)$$
$$(x \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}^+),$$

ahol

$$l_{k,n}(x) := l_{k,n}(U,x) = \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})}$$
$$(x \in [-1,1],\ k = 1,2,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N}^+)$$

a Lagrange-interpolációs alappolinomokat jelöli.

Adott $\cos\theta = x \in [-1,1]$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén vezessük be az

$$x_+ := \cos\theta_+ := \cos{(\theta + \varphi_n)} = x\cos\varphi_n - \sqrt{1-x^2}\sin\varphi_n,$$

$$x_- := \cos\theta_- := \cos{(\theta - \varphi_n)} = x\cos\varphi_n + \sqrt{1-x^2}\sin\varphi_n$$

számokat, ahol

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

A (4) pontrendszerre a *súlyozott Grünwald–Rogosinski-eljárást* így definiáljuk:

$$(A_nf)(x) := A_n(f,U,w_\gamma,x) := \frac{1}{2}\Big\{L_n(f,U,w_\gamma,x_+) + L_n(f,U,w_\gamma,x_-)\Big\}$$
$$(x \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}^+,\ f \in C_{w_\gamma}). \tag{5}$$

A következő tétel ennek az eljárásnak az egyenletes konvergenciájára ad szükséges és elégséges feltételt, valamint a konvergencia nagyságrendjével is foglalkozik. Az állítás megfogalmazásához szükségünk lesz egy $f \in C[-1,1]$ függvény másodrendű simasági modulusára, amelyet jelöljön

$$\omega_2(f,t) := \sup_{0<h\leq t} \|\Delta_h(f,\cdot)\|_\infty \quad (t>0),$$

ahol

$$\Delta_h(f,x) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \quad (x \in [-1+h, 1-h]).$$

Jelölje továbbá

$$E_n^\gamma(f) := E_n^{(\gamma,\gamma)}(f)$$

az $f \in C_{w_\gamma}$ függvény n-edfokú algebrai polinomokkal való legjobb megközelítését.

10. tétel. *Az* (5) *eljárás egyenletesen konvergens a* $\mathbf{C_{w_\gamma}}$ *térben, azaz a*

$$\lim_{n\to\infty} |A_n(f,U,w_\gamma,x) - (fw_\gamma)(x)| = 0$$

reláció egyenletesen fennáll a $[-1,1]$ *intervallumon minden* $f \in C_{w_\gamma}$ *függvény esetén akkor és csak akkor, ha*

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2.$$

A konvergencia nagyságrendjéről a következőt mondhatjuk:

$$|A_n(f,U,w_\gamma,x) - (fw_\gamma)(x)| = O(1)\,(E_{n-1}^\gamma(f) + \omega_2(fw_\gamma,\varphi_n))$$
$$(x \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N}^+,\ f \in C_{w_\gamma}).$$

Hivatkozások

[1] **Agahanov, S. A., Natanson, G. I.,** The Lebesgue function of Fourier–Jacobi sums, *Vestnik Leningrad. Univ.*, **23/1** (1968), 11–23.

[2] **Chripkó, Á.,** Weighted approximation via Θ-summations of Fourier–Jacobi series, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **47** (2010), 139–154.

[3] **Chripkó, Á.,** On the weighted Lebesgue function of Fourier–Jacobi series, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, **35** (2011), 51–81.

[4] **Chripkó, Á.,** On the weighted Grünwald–Rogosinski process, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, **43** (2014), 163–179.

[5] **Grünwald, G.,** On a convergence theorem for the Lagrange interpolation polynomials, *Bull. of AMS*, **47** (1941), 271–275.

[6] **Szili, L., Vértesi, P.,** On summability of weighted Lagrange interpolation I. (General weights), *Acta Math. Hungar.*, **101** (2003), 323–344.

[7] **Szili, L., Vértesi, P.,** On summability of weighted Lagrange interpolation III. (Jacobi weights), *Acta Math. Hungar.*, **104** (2004), 39–62.

[8] **Webster, M. S.,** A convergence theorem for certain Lagrange interpolation polynomials, *Bull. of AMS*, **49** (1943), 114–119.