Az értekezés tézisei

Stabilitási koncepciók és alkalmazásaik

Szerző:
Fekete Imre
Doktorjelölt

Témavezető:
Dr. Faragó István
MTA Doktora

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Iskolavezető: Dr. Laczkovich Miklós, MTA Rendes Tagja
Programvezető: Dr. Michaletzky György, MTA Doktora

Alkalmazott Analízis és
Számításmatematikai Tanszék

Budapest
2015

Stabilitási koncepciók és alkalmazásaik

A disszertáció operátoregyenletek stabilitási koncepcióival és azok elméleti numerikus analízisbeli alkalmazási lehetőségeivel foglalkozik. A dolgozat a Szerző megjelent cikkjein [4], [6], [5], [2], elfogadott cikkjén [1] és kéziratán [3] alapszik.

A fenti cikkek az egyes fejezetekhez az alábbi módon kötődnek:

- Az 1. Fejezet alapja [4],
- A 2. Fejezetnek az alábbi cikkek képezik az alapját: [6], [5], [1], [3],
- A 3. Fejezetnek az alábbi cikkek képezik az alapját: [4], [6], [2],
- A 4. Fejezet alapja [4].

A tézisfüzet sorszámai a disszertáció sorszámozását követik.

1. fejezet

A numerikus analízis alapfogalmai

Az 1 Fejezet fő célja a probléma felállítása, az alapfogalmak (konzisztencia, stabilitás és konvergencia) motiválása és bevezetése nemlineáris operátoregyenletekre absztrakt módon.

Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek, továbbá $F : \mathrm{dom(F)} \subset X \to Y$ legyen egy nemlineáris operátor (nem feltétlenül korlátos).

$$F(u) = 0, \quad u \in \mathrm{dom(F)}.$$

Definíció (1.1.1)**.** Az (1.1) feladatot a $\mathscr{P} = (X, Y, F)$ hármassal jellemezhetjük. Ezt a továbbiakban $\mathscr{P}$ problémának nevezzük.

Az egyszerűbb feladatok sorozata matematikalag egy $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}^p$, $p \in \mathbb{N}$ index halmaz, $(X_n, \|\cdot\|_{X_n})$ és $(Y_n, \|\cdot\|_{Y_n})$ normált terek és $F_n : \mathrm{dom(F_n)} \subset X_n \to Y_n$ operátorok sorozatának definiálását jelenti. Ekkor az alábbi problémát nézhetjük:

$$F_n(u_n) = 0, \quad u_n \in \mathrm{dom(F_n)} \quad \text{és} \quad n \in \mathbb{I}.$$

Definíció (1.1.2)**.** Az $\mathscr{N} = (X_n, Y_n, F_n)_{n\in\mathbb{I}}$ sorozatot numerikus módszernek nevezzük, ha (1.4) problémák sorozatát generálják.

Definíció (1.1.3)**.** Tekintsük minden $n \in \mathbb{I}$ esetén a $\varphi_n : X \to X_n$ és $\psi_n : Y \to Y_n$ leképezéseket. Ekkor a $\mathscr{D} = (\varphi_n, \psi_n, \Phi_n)_{n\in\mathbb{I}}$ sorozatot diszkretizációnak nevezzük, ahol

$$\Phi_n : \{F : \mathrm{dom(F)} \to Y \mid \mathrm{dom(F)} \subset X\} \to \{F_n : \mathrm{dom(F_n)} \to Y_n \mid \mathrm{dom(F_n)} \subset X_n\}.$$

Definíció (1.2.2)**.** A $\mathscr{P}$ problémára alkalmazott $\mathscr{D}$ diszkretizáció konvergens, ha $\lim_{n\to\infty} \|e_n\|_{X_n} = 0$. Ha $\|e_n\|_{X_n} = \mathcal{O}(n^{-p})$, akkor a konvergencia p-edrendű.

Definíció (1.2.4)**.** A $\mathscr{P}$ problémára alkalmazott $\mathscr{D}$ diszkretizáció egy $v \in \mathrm{dom(F)}$ elemen konzisztens, ha

i, $\varphi_n(v) \in \mathrm{dom(F_n)}$ igaz egy indextől kezdve, valamint

ii, $\lim_{n\to\infty} \|l_n(v)\|_{Y_n} = 0$.

Ha $\|l_n(v)\|_{X_n} = \mathcal{O}(n^{-p})$, akkor v elemen a konzisztencia rendje p.

Az 1.1.1, 1.1.2 és 1.1.3 Példák a bevezetett absztrakt szerkezet könnyebb megértését segítik elő.

2. fejezet

N-stabilitás és alkalmazásai

Az N-stabilitás fogalmát López-Marcos és Sanz-Serna vezették be. A fejezet bevezető részének fő eredménye az, hogy a numerikus analízis alaptétele nemlineáris operátoregyenletek esetén is igaz.

Tétel (2.0.1)**.** Tegyük fel, hogy

i, az (1.1) és az (1.4) feladatoknak léteznek megoldásai,

ii, a $\mathscr{D}$ diszkretizáció p-edrendű u^*-on és N-stabil a C stabilitási konsttanssal, illetve

iii, a ψ_n leképezésre a $\|\psi_n(0)\|_{Y_n} = \mathcal{O}(n^{-p})$ tulajdonság fennáll.

Ekkor a $\mathscr{D}$ diszkretizáció konvergens a $\mathscr{P}$ problémán és a konvergencia rendje nem alacsonyabb, mint a konzisztencia rendje.

A 2.1 Fejezet eredményei

Lineáris feladatok esetén Definíció 2.1.1 speciális esete Definíció 2.0.5-nek. Azaz az N-stabilitás természetes kiterjesztése Definíció 2.1.1-nek.

Megjegyzés (2.1.1)**.** A (2.4)-es korlát a következő három tulajdonságot implikálja:

i, Ha L_n szürjektív, akkor a stabilitási korlát a (2.3) megoldásának létezését és egyértelműségét vonja maga után.

ii, Igaz az $\|L_n^{-1}\|_{B(Y_n,X_n)} \leq C$ egyenletes korlátosság.

iii, Adódik a numerikus analízis alaptétele.

A Megjegyzés 2.1.1 (i) és (ii) pontjai azt mutatják, hogy az N-stabilitásból következik a lineáris stabilitás. Másrészről a vissza irány is igaz, mert

$$\|s_n\|_{X_n} = \|L_n^{-1}L_n s_n\|_{Y_n} \leq \|L_n^{-1}\|_{B(Y_n,X_n)}\|L_n s_n\|_{Y_n} \leq C\|L_n s_n\|_{Y_n}.$$

Ezeknek köszönhetően állíthatjuk azt, hogy lineáris problémák esetén az N-stabilitás és a lineáris stabilitás fogalmai egybeesnek.

A 2.2 Fejezet eredményei

A bevezetett struktúra segítségével a (2.5)-(2.6) kezdetiérték-feladat (1.1) alakban írható. Annak érdekében, hogy a (2.5)-(2.6) feladatot (1.4) alakban írhassuk bevezetjük az L_n operátort, mely egy $w_n \in X_n$ elemen az alábbi módon hat:

$$[L_n w_n](t_k) = \Phi(\tau_k, t_{k-1}, w_n(t_{k-1}), w_n(t_k)),\ \ t_k \in \omega_\tau^0,$$

ahol az operátor értelmezési tartománya

$$\mathrm{dom(L_n)} := \{w_n \in X_n \mid w_n(t_0) = u_0\}.$$

Tétel (2.2.1)**.** A (2.10) zeró-stabil operátor invertálható az alábbi halmazon:

$$\mathrm{dom(L_n)} := \{w_n \in X_n \mid w_n(t_0) \text{ rögzített}\}.$$

Tétel (2.2.2)**.** Tegyük fel, hogy

i, az (1.1) feladatnak létezik megoldása, illetve

ii, a $\mathscr{D}$ diszkretizácó p-edrendben konzisztens és zéró-stabil.

Ekkor a $\mathscr{P}$ problémára alkalmazott $\mathscr{D}$ diszkretizáció konvergens és a konvergencia rendje nem alacsonyabb, mint a konzisztencia rendje.

Hasonló megközelítést használva általános alakban írunk fel s-lépéses lineáris többlépéses módszereket és megmutatjuk azok zéró-stabilitását. Ebben az esetben az L_n operátor egy $w_n \in X_n$ elemen az alábbi módon hat:

$$[L_n w_n](t_k) = \frac{1}{\tau_k}\sum_{j=0}^{s} \alpha_j w_n(t_{k-j}) - \sum_{j=0}^{s} \beta_j f_{k-j},\ \ t_k \in \omega_\tau^0,$$

ahol az operátor értelmezési tartománya

$$\mathrm{dom(L_n)} := \{w_n \in X_n \mid w_n(t_l) \text{ rögzített } l = 0, 1, \dots, s-1 \text{ esetén}\}.$$

Tétel (2.2.3)**.** A (2.14) zéró-stabil operátor invertálható az alábbi halmazon:

$$\mathrm{dom(L_n)} := \{w_n \in X_n \mid w_n(t_l) \text{ rögzített } l = 0, 1, \dots, s-1 \text{ esetén}\}.$$

Tétel (2.2.4)**.** Tegyük fel, hogy

i, az (1.1) feladatnak létezik megoldása,

ii, az $s-1$ kezdeti közelítések p-edrendben adottak, illetve

iii, a $\mathscr{D}$ diszkretizácó p-edrendben konzisztens és zéró-stabil.

Ekkor a $\mathscr{P}$ problémára alkalmazott $\mathscr{D}$ diszkretizáció konvergens és a konvergencia rendje nem alacsonyabb, mint a konzisztencia rendje.

A 2.3 Fejezet eredményei

Egyfajta tesztfeladatként két klasszikus probléma osztályt tekintünk: a (2.18)-(2.20) és a (2.32)-(2.34) egyenletekkel leírt reakció-diffúzió típusú feladatokat, valamint a (2.40)-(2.42) és a (2.54)-(2.56) egyenletekkel leírt transzport feladatokat. A fejezet fő célja az, hogy ezeken a feladatokon keresztül megmutassa, hogy az N-stabilitás hatékony eszköz lehet időfüggő parciális differenciálegyenletek stabilitási tulajdonságainak vizsgálatára.

Reakció-diffúzió problémák

Tétel (2.3.1)**.** Az $r \leq 1/[2(1-\theta)]$ feltétel mellett a θ-séma a bevezetett normában N-stabil a (2.18)-(2.20) periodikus peremű diffúzió kezdetiérték-feladatra.

Tétel (2.3.2)**.** Az $r \leq 1/[2(1-\theta)]$ feltétel mellett a θ-séma a bevezetett normában konvergens a (2.18)-(2.20) periodikus peremű diffúzió kezdetiérték-feladatra.

Tétel (2.3.3)**.** Amennyiben teljesül, hogy $r \leq 1/[2(1-\theta)]$ és f Lipschitz tulajdonságú forrástag, akkor a θ-séma a bevezetett normában N-stabil a (2.32)-(2.34) periodikus peremű reakció-diffúzió kezdetiérték-feladatra.

Transzport problémák

Tétel (2.3.4)**.** A centralizált Crank–Nicolson-séma N-stabil a (2.53) normában a (2.40)-(2.42) periodikus peremű transzport kezdetiérték-feladatra.

Tétel (2.3.5)**.** A centralizált Crank–Nicolson-séma térben és időben másodrendben konvergens a (2.40)-(2.42) periodikus peremű transzport kezdetiérték-feladatra.

Tétel (2.3.6)**.** A centralizált Crank–Nicolson-séma N-stabil a (2.53) normában a (2.54)-(2.56) periodikus peremű forrástaggal rendelkező transzport kezdetiérték-feladatra.

A 2.4 Fejezet eredményei

A 2.4 fejezetben nemlineáris evolúciós egyenleteket tekintünk, melyek megoldásait nemlienáris operátorfélcsoportok adják. Egy A ω-disszipatív operátor esetén a nemlineáris absztrakt Cauchy feladat az alábbi:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t,\cdot) = A(u(t,\cdot)), & t > 0 \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \in \mathscr{X}_0. \end{cases}$$

Egy adott $t \geq 0$-hoz választunk egy $K \in \mathbb{N}$ értéket, rögzítjük a $\tau = \frac{t}{K}$ értéket és megválasztjuk a $z_0, z_{ij} \in \mathbb{R}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $\nu, \nu_i \in \mathbb{N}$ értékeket úgy, hogy $c_i > \beta\tau$, azaz $c_i K > \beta t$. Ekkor tetszőleges $f \in \mathrm{dom(A)}$ esetén nemlineáris operátorokra definiálunk egy nemlineáris racionális approximációt az alábbi módon:

$$r(\tau A_m)(f) = z_0 f + \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu_i} z_{ij} \big((I - \tfrac{\tau}{c_i} A_m)^{-1}\big)^j (f).$$

A Megjegyzés 2.4.6 alapján az $(I - \frac{\tau}{c_i}A_m)^{-1}$: dom(A) $\to$ dom(A) operátorok minden $0 < \frac{\tau}{c_i} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\omega_m}$ esetén léteznek, ezért az $r(\tau A_m)$: dom(A) $\to$ dom(A) operátorok minden $m \in \mathbb{N}$ esetén jól definiáltak. A (2.73) és (2.75) képletek vezetnek a teljes diszkretizációhoz. Az (1.4) feladat F_n operátorának hatása tetszőleges $v_n \in (\mathrm{dom(A)})^{K+1}$ elem esetén az alábbi:

$$\begin{cases} \big(F_n(v_n)\big)_0 = (v_n)_0, \\ \big(F_n(v_n)\big)_k = (v_n)_k - r(\tau A_m)^k\big((v_n)_0\big), \qquad k = 1, ..., K. \end{cases}$$

A Megjegyzés 2.4.6 következtében tetszőleges $f, g \in \mathrm{dom(A)}$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén igaz, hogy

$$\big\|(I - \tfrac{\tau}{c_i}A_m)^{-1}(f) - (I - \tfrac{\tau}{c_i}A_m)^{-1}(g)\big\|_{\mathscr{X}} \le \Lambda_{c_i}\|f - g\|_{\mathscr{X}},$$
$$\text{ahol} \quad \Lambda_{c_i} := \frac{1}{1 - \frac{\tau}{c_i}\beta}.$$

Az $X_n = \mathscr{X}^{K+1}$ és $Y_n = \mathscr{X}^{K+1}$ tereket az alábbi normákkal látjuk el:

$$\|f\|_{X_n} := a_K \sum_{k=0}^{K} \|f_k\|_{\mathscr{X}}, \qquad f = (f_0, ..., f_K) \in X_n = \mathscr{X}^{K+1},$$
$$\|f\|_{Y_n} := \sum_{k=0}^{K} \|f_k\|_{\mathscr{X}}, \qquad f = (f_0, ..., f_K) \in Y_n = \mathscr{X}^{K+1},$$

ahol

$$a_K = \begin{cases} \dfrac{1}{K+1}, & \text{ha } Z = 1, \\ \dfrac{Z-1}{Z^{K+1}-1}, & \text{ha } Z > 1. \end{cases}$$

Ekkor már abban a pozícióban vagyunk, hogy meg tudjuk mutatni, hogy a (2.73) nemlineáris racionális approximációk N-stabilak.

Tétel (2.4.6)**.** Tegyük fel, hogy A egy ω-disszipatív operátor $\mathscr{X}$-en, ahol $\omega \ge 0$. Tegyük fel továbbá, hogy A_m, $m \in \mathbb{N}$ operátorkra teljesülnek a Feltevés 2.4.2 feltételei. Ekkor a (2.76) numerikus séma N-stabil a $C = 1$ stabilitási konstanssal.

Lineáris esetben az alábbi stabilitási feltételt nyerjük: létezik egy $\widetilde{C} > 0$ konstans úgy, hogy

$$\sup_{k=0,...,K} \|r(\tau A_m)^k\|_{\mathscr{X}\to\mathscr{X}} \le \widetilde{C}$$

igaz minden $\tau = \frac{t}{K}$ esetén rögzített $t \ge 0$ időrétegre. Rögzített $K \in \mathbb{N}$ esetén ez épp a Lax–Richtmyer stabilitás. Mivel a (2.79)-ös képlet az $\|r(\tau A_m)\|_{\mathscr{X}\to\mathscr{X}} \le Z$ becslést adja lineáris operátorok esetén, ezért

$$\sup_{k=0,...,K} \|r(\tau A_m)^k\|_{\mathscr{X}\to\mathscr{X}} \le \sup_{k=0,...,K} \|r(\tau A_m)\|^k_{\mathscr{X}\to\mathscr{X}} \le \sup_{k=0,...,K} Z^k = Z^K,$$

azaz ebben az esetben a (2.88) stabilitási feltétel igaz $\widetilde{C} := Z^K$ konstanssal rögzített $K \in \mathbb{N}$ esetén.

3. fejezet

További stabilitásfogalmak

A 3.1 Fejeztben egy egyszerű Ricatti-típusú példát nézünk, melyre explicit Euler módszert alkalmazunk. Ez a példa azt mutatja, hogy az N-stabilitás túlságosan megszorító, mert a (2.2) stabilitási feltétel teljesülését minden elemre megköveteljük $\mathrm{dom}(\mathrm{F_n})$-ből. Azt is látjuk továbbá, hogyha a perturbáció túl nagy, akkor a (2.2) becslés nem marad érvényben. Ezek motiválják a lokális típusú definíciók és stabilitási küszöbök bevezetését.

A 3.2 Fejezet eredményei

Lemma (3.2.3)**.** Tegyük fel, hogy

i, V, W normált terek a $\dim V = \dim W < \infty$ tulajdonsággal,

ii, $G : B_R(v) \to W$ folytonos, ahol $B_R(v) \subset V$ gömb $v \in V$ és $R \in (0, \infty]$ esetén, illetve

iii, tetszőleges v^1, v^2-re melyekre $v^i \in B_R(v),\ i = 1, 2$ a következő becslés igaz:

$$\left\|v^1 - v^2\right\|_V \leq C \left\|G(v^1) - G(v^2)\right\|_W .$$

Ekkor

i, G invertálható és $G^{-1} : B_{R/C}(G(v)) \to B_R(v)$;

ii, G^{-1} Lipschitz folytonos a C konstanssal.

Lemma (3.2.4)**.** Tegyük fel, hogy

i, a $\mathscr{D}$ diszkretizáció a $\mathscr{P}$ problémán konzisztens és K-stabil u^*-on az R stabilitási küszöbbel és C stabilitási konstanssal, illetve

ii, a Feltevés 1.1.1 és 3.2.1 feltételei teljesülnek.

Ekkor a $\mathscr{D}$ diszkretizáció egy $\mathscr{N}$ numerikus módszert generál úgy, hogy az (1.4) feladatnak a $B_R(\varphi_n(u^*))$ gömbben egy indextől kezdve egyértelmű megoldása van.

Tétel (3.2.5)**.** Tegyük fel, hogy

i, a $\mathscr{D}$ diszkretizáció a $\mathscr{P}$ problémán konzisztens és K-stabil u^*-on az R stabilitási küszöbbel és C stabilitási konstanssal, illetve

ii, a Feltevés 1.1.1 és 3.2.1 feltételei teljesülnek.

Ekkor a $\mathscr{P}$ problémára alkalmazott $\mathscr{D}$ diszkretizáció konvergens és a konvergencia rendje nem alacsonyabb, mint a konzisztencia rendje.

A fejezet végén ismét megvizsgáljuk a Ricatti-típusú példát és megmutatjuk, hogy K-stabil. Hasonlóan vizsgáljuk egy általánosabb operátor osztály K-stabilitását.

Tétel (3.2.6)**.** A (3.9) diszkrét operátor adott feltételek mellett K-stabil lesz a $C = e^{L(R)}$ konstanssal.

Tétel (3.2.8)**.** A (3.12) diszkrét operátor K-stabil a $C = e^{(1+\theta)L(R)}$ konstanssal.

A 3.3 Fejezet eredményei

Definíció 3.3.1 fogalmát használva az alábbi elméleti eredményeket igazoljuk.

Lemma (3.3.1)**.** Ha $\|\cdot\|_{X_n}$ és $\|\cdot\|_X$ konzisztens normák, akkor $v = 0$ pontosan akkor igaz, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n(v)\|_{X_n} = 0$.

Tétel (3.3.2)**.** Tegyük fel, hogy

i, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_n}$ és $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ konzisztens normák,

ii, az (1.1) és az (1.4) feladatoknak léteznek megoldásai, illetve

iii, a $\mathscr{D}$ diszkretizáció konzisztens és T-stabil az u^* elemen.

Ekkor u^* egyértlemű, tetszőleges $n \in \mathbb{I}$ esetén u_n^* is egyértlemű és az $\mathscr{N}$ numerikus módszer konvergens.

A fejezet második részében a bevezetett T-stabilitást a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából vizsgáljuk. Fő célunk Trenogin eredeti eredményének javítása. Nevezetsen ő azt igazolta, hogy az (1.2)-(1.3) kezdetiérték-feldatra alkalmazott explicit Euler módszer ekvidsztáns rácson T-stabil. Vele ellentétben mi azt igazoljuk, hogy az erre a feladatra alkalmazott tetszőleges egylépéses módszer ekvidisztáns és nem ekvidisztáns rácson T-stabil.

Tétel (3.3.3)**.** A (3.22) feltétel mellett az explicit egylépéses módszerek ekvidisztáns rácson T-stabilak az (1.2)-(1.3) kezdetiérték-feladatra.

Tétel (3.3.4)**.** A (3.22) feltétel mellett az explicit egylépéses módszerek a nem ekvidisztáns rácson T-stabilak az (1.2)-(1.3) kezdetiérték-feladatra.

Tétel (3.3.5)**.** A (3.29) feltétel mellett az implicit egylépéses módszerek ekvidisztáns rácson T-stabilak az (1.2)-(1.3) kezdetiérték-feladatra.

Tétel (3.3.6)**.** A (3.29) feltétel mellett az implicit egylépéses módszerek a nem ekvidisztáns rácson T-stabilak az (1.2)-(1.3) kezdetiérték-feladatra.

A 3.4 Fejezetben röviden ismertetjük gonolatainkat az S- és LSS-stabilitással kapcsolatban.

4. fejezet

Alapfogalmak újbóli vizsgálata

A 3.2 Fejezet fő eredménye gyakorlati szempontból nem ideális, hiszen a Tétel 3.2.5 feltételei az ismeretlen u^* elemen a konzisztenia és K-stabilitás ellenőrzését igénylik.

A 4.1 Fejezet eredményei

Ennek következtében a korábban egy elemen adott lokális definíciókat halmazokra adott globális módon szeretnénk megadni. Ezek lesznek a 4.1.1 és 4.1.2 definíciók. Továbbá ebben a fejezetben halmazokra vonatkozó elméleti eredményeket is adunk.

Lemma (4.1.1)**.** A Feltevés $A^\star$ mellett feltesszük még, hogy

i, a $\mathscr{D}$ diszkretizáció a $\mathscr{P}$ problémán konzisztens, illetve

ii, a $\mathscr{P}$ problémára alkalmazott $\mathscr{D}$ diszkretizáció K-stabil az u^* elemen az R stabilitási küszöbbel és C stabilitási konstanssal.

Ekkor F_n a $\psi_n(0)$ pontban invertálható, azaz $F_n^{-1}(\psi_n(0))$ létezik elegendően nagy n index mellett.

Következmény (4.1.2)**.** A Lemma 4.1.1 mellett elegendően nagy k és n indexek mellett az alábbiak igazak:

i, Létezik $F_n^{-1}(\psi_n(y^k))$, mivel $\psi_n(y^k) \in B_{R/2C}(F_n(\varphi_n(u^k)))$.

ii, $F_n^{-1}(\psi_n(y^k)), \varphi_n(F^{-1}(y^k)) \in B_{R/2}(\varphi_n(u^*))$.

Tétel (4.1.3)**.** A Feltevés $A^\star$ mellett tegyük fel még, hogy a $\mathscr{D}$ diszkretizáció a $\mathscr{P}$ problémán

i, konzisztens, illetve

ii, K-stabil az R stabilitási küszöbbel és C stabilitási konstanssal.

Ekkor a $\mathscr{P}$ problémára alkalmazott $\mathscr{D}$ diszkretizáció konvergens az F^* halmazon.

A 4.2 Fejezet eredményei

A Tétel 4.1.3 azt mutatja, hogy a $\mathscr{P}$ problémára alkalmazott $\mathscr{D}$ diszkretizáció konzisztenciája és stabilitása garantálja a konvergenciát, azaz e két fogalom együttesen a konvergencia elegendő feltétele. Nyilvánvaló módon ebből a szükségességükre nem tudunk következtetni.

Ugyanakkor, bárki számára ésszerű az a kérdés, hogy vajon mi lehet az általános kapcsolat közöttük. Mindhárom fogalom egyaránt lehet igaz (I) és hamis (H), így nyolc különböző eset adódik. Ezeket és a hozzátartozó válaszokat a lenti táblázatban ismertetjük.

	Konzisztencia	Stabilitás	Konvergencia	Válasz	Ok
1	I	I	I	Mindig Igaz	Tétel 4.1.3
2	I	I	H	Mindig Hamis	Tétel 4.1.3
3	I	H	I	Lehetséges	Példa A.3.2
4	I	H	H	Lehetséges	Példa A.3.1
5	H	I	I	Lehetséges	Példa A.3.3
6	H	I	H	-	-
7	H	H	I	Lehetséges	Példa A.3.4
8	H	H	H	-	-

Az egyes esetekhez tartozó válaszok.

Megjegyeznénk, hogy a 6. és 8. eseteket azért nem vizsgáltuk, mert azok a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából irreleváns esetek. A táblázat eredményei jól mutatják, hogy sem a konzisztencia sem a stabilitás nem szükséges a konvergenciához.

Irodalomjegyzék

[1] P. Csomós, I. Faragó, and I. Fekete, *Numerical stability for nonlinear evolution equations*, Comput. Math. Appl., accepted (2015).

[2] I. Faragó and I. Fekete, *T-stability of general one-step methods for abstract initial-value problems*, Open Math. J., 6 (2013), pp. 19–25.

[3] ——, *0-stability of operator form of linear multistep methods*, preprint (2015).

[4] I. Faragó, M. E. Mincsovics, and I. Fekete, *Notes on the basic notions in nonlinear numerical analysis*, in The 9th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, vol. 6 of Proc. Colloq. Qual. Theory Differ. Equ., Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Szeged, 2012, pp. 1–22.

[5] I. Fekete and I. Faragó, *N-stability of the θ-method for reaction-diffusion problems*, Miskolc Math. Notes, 15 (2014), pp. 447–458.

[6] ——, *Stability concepts and their applications*, Comput. Math. Appl., 67 (2014), pp. 2158–2170.